

Фазни портрети у 2D

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$$

$$X' = A \cdot X \rightarrow \text{линеарна СИ} \\ (\text{динамички систем}) \quad (\text{систем})$$

$$A \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{са конст. коеф.} \quad (\text{ЛСДЖК})$$

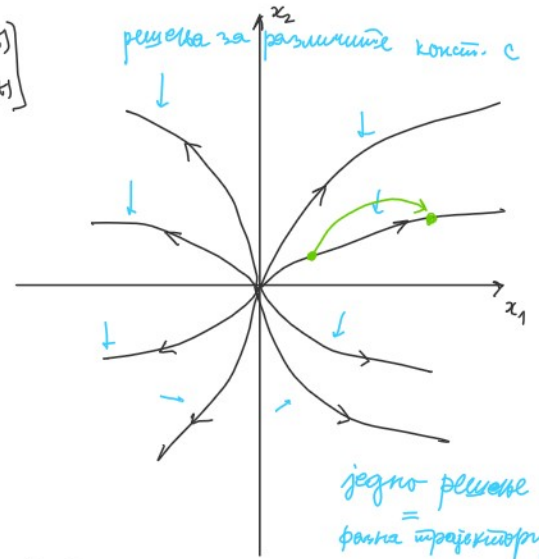
<https://aeb019.hosted.uark.edu/ppplane.html>

Еквиваленција:  $X' = 0$

ЛСДЖК:  $A \cdot X = 0 \Rightarrow X$  је век. подпрост. од  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$  еквиваленција са

- тачка  $(0,0)$
- права кроз  $(0,0)$
- $\mathbb{R}^2$

Фазни портрети



решења  $X(t)$   
( $c \in \mathbb{R}^2$ )

1) Скицирати фазни портрет динамичког система  $X' = AX$ , ако је:

- a)  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ ;
- б)  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ ;
- в)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ;
- г)  $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ;
- д)  $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ;
- ђ)  $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I = Id$$

јединичка матр.

Линк на материјалима из курса ДБ одкле је узет овај задатак. Пошто смо овде имали убрзани курс за скицање фазних портрета, не очекује се да радите детаљно као у материјалима. Овде смо цртали само системе у сведеном облику, без додатне линеарне трансформације.

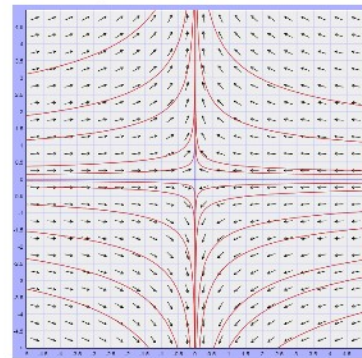
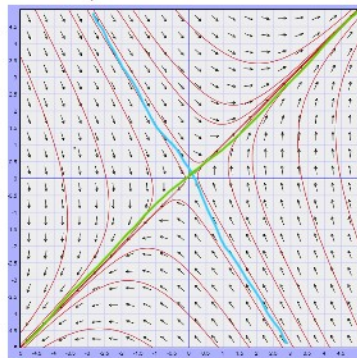
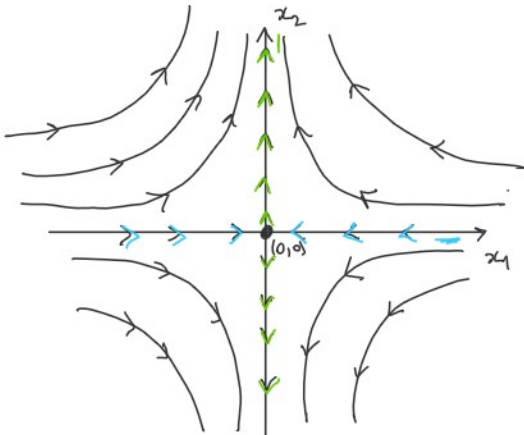
<https://tinyurl.com/fazniPortreti1>

$$б) \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 5 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)(3+\lambda) - 15 = \lambda^2 + 4\lambda - 12 = (\lambda+6)(\lambda-2)$$

$$\lambda_1 = -6, \quad \lambda_2 = 2 \rightarrow \text{седло}$$

прави ФП

окој ФП који ми скицирамо



$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

један еквиваленција:  $AX = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ 5(3x_2) - 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ 12x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$\det A \neq 0$

Г)  $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\alpha \pm i\beta$  ( $\alpha > 0$ )

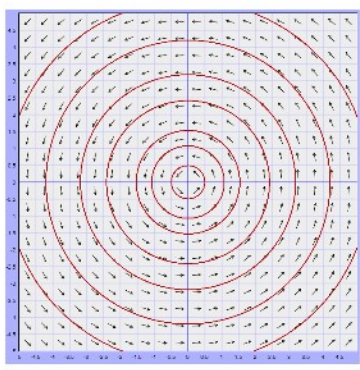
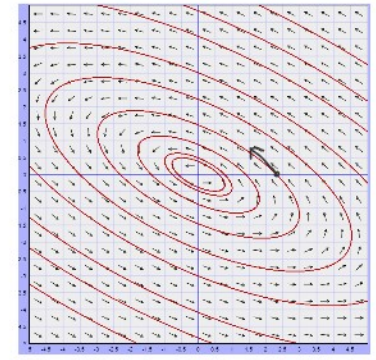
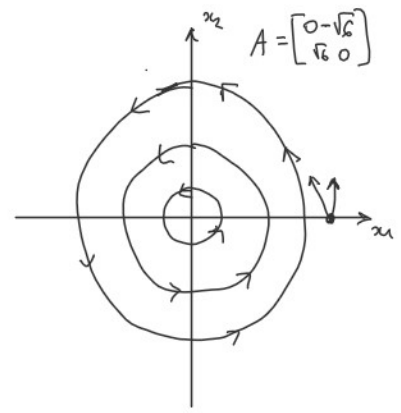
$X^* \rightarrow$  осьнака на енбминспациум  
 $X^* = (0,0)$

$\lambda_1 = i\sqrt{6}, \lambda_2 = -i\sqrt{6} \rightarrow$  *узелнак*

$\hookrightarrow$  непрогонине тирајекторје

$X^1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$   
 $x_1 = 1$   
 $x_2 = 0$

$A = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}$



Д)  $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

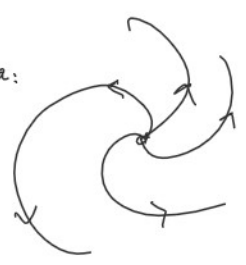
$X^* = (0,0)$

$\alpha \pm i\beta = \lambda_{1,2} = -2 \pm i \rightarrow$   
 $\alpha < 0$

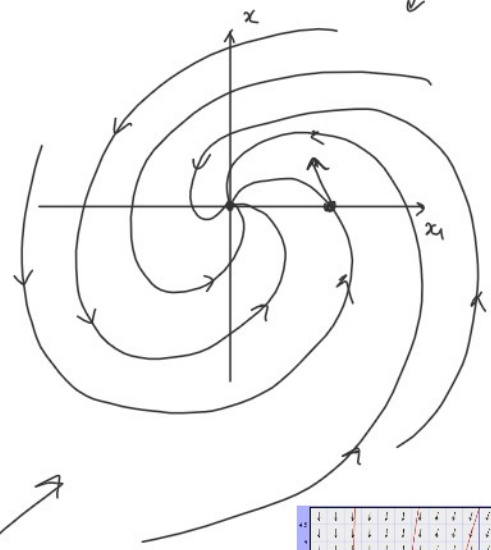
*спирална*  
*стабилна*

$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$

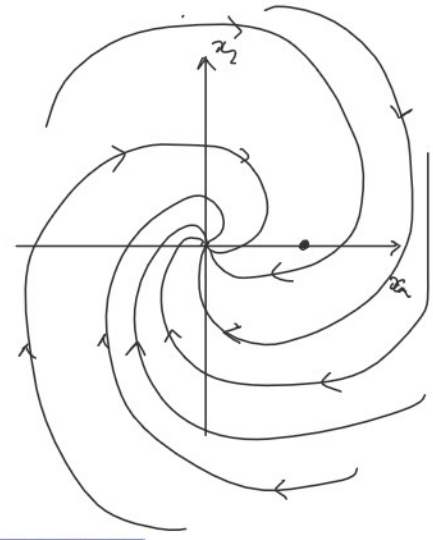
Клирордима:



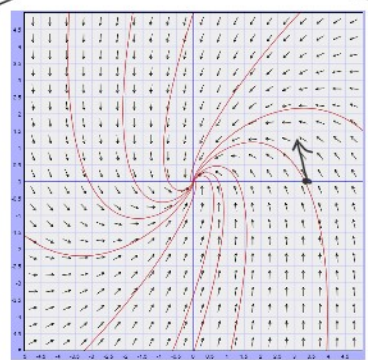
$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$



$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$



$\left. \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\} X^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$



Б)  $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

...  $AX = 0$

$\downarrow$

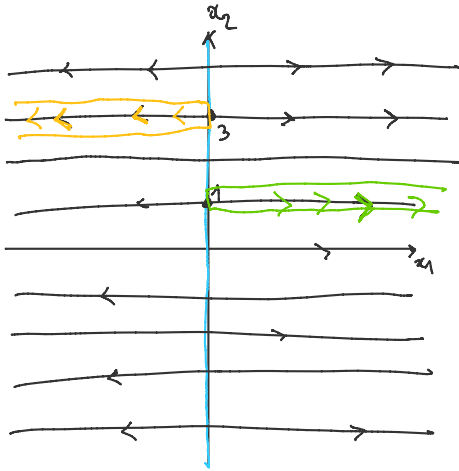
b)  $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\det A = 0$

$AX = 0$   
 $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

$\downarrow$   
 $\left. \begin{matrix} 5x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_1 = 0$

$X^* = (0, s), s \in \mathbb{R} \rightarrow \text{ўраўненне}$



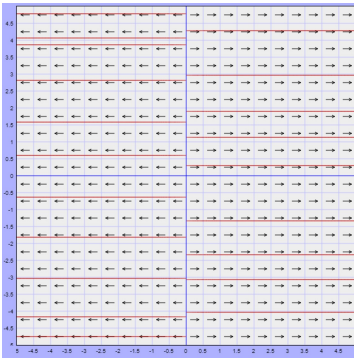
$X' = AX$   
 $\left. \begin{matrix} x_1' = 5x_1 \\ x_2' = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = c_1 e^{5t} \\ x_2 = c_2 \end{matrix}$

$5 > 0$

$\left. \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{matrix} \right\}$

$t \uparrow \Rightarrow x_1 \uparrow$

$\left. \begin{matrix} c_1 = -1 \\ c_2 = 3 \end{matrix} \right\} t \uparrow x_1 = -e^{5t} \downarrow$



$\leftarrow$  фазны ўраўненне з улічэннем

$X' = AX$

$A = PDP^{-1} \rightarrow \text{смена: } Y = P^{-1}X$

$\left. \begin{matrix} Y' = DY \end{matrix} \right\}$

$\left( P^{-1} \cdot X' = D \cdot P^{-1} \cdot X \Rightarrow X' = \underbrace{PDP^{-1}}_A \cdot X \right)$

$D$  - дыяганальная матрыца (ўз. ўспрымальнасць і частаты)

1)  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

2)  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$  ( $\alpha \pm i\beta$  сопр. в.р.)

3)  $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow$  жоргановы блок

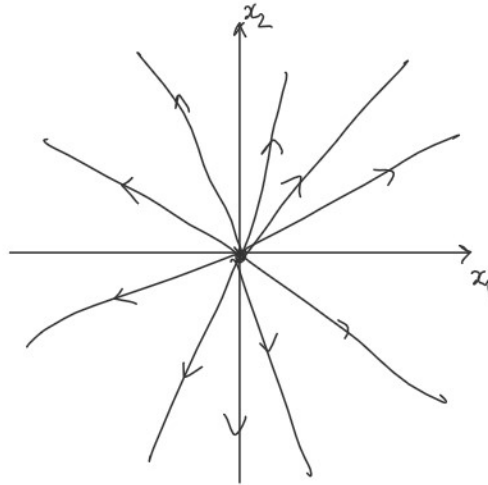
повољене сооп. бр.  $\rightarrow D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

2) Скицирати фазни портрет динамичког система  $X' = AX$ , ако је:

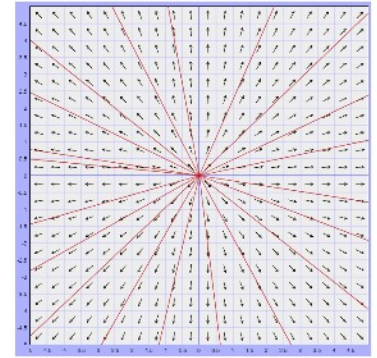
а)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$     б)  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$     в)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$     г)  $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$     д)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Линк ка материјалима из курса ДББ одакле је узет овај задатак. Пошто смо овде имали убрзани курс за скицање фазних портрета, не очекује се да радите детаљно као у материјалима. Овде смо цртали само системе у сведеном облику, без додатне линеарне трансформације. На крају фајла имате нека питања ако желите да више и боље разумете градиво.  
<https://tinyurl.com/fazniPortreti2>

а)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0$   
 $A$ -гујајошна  
 $X^* = (0, 0)$



Квадратна звезда (сингуларни чвор)



г)  $X^* = (0, 0)$   
 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$   
 $D$ -гујајошна или није?  
 → колика је дим соопств. простора?

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 E)v = 0$$

$$\left( \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 2E \right) v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0$$

$$-\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-\alpha + \beta = 0$$

$$\dim = \dim \mathcal{L} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \underline{1}. \rightarrow \text{није гујајошна}$$

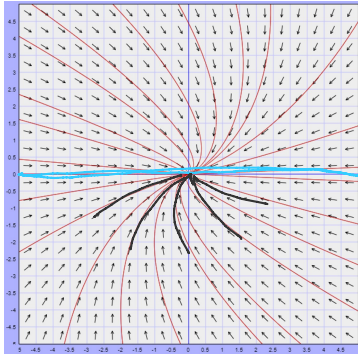
(1 < 2)

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{квадратан генерисани чвор}$$

(-2 < 0)

$$\left. \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\} X^1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

D ↷



A ↷

