6 - петак 20.11.2020.

1) $x' = x(1-x)$. Без решавања:

а) Свако решење $x(0)=a\in(0,1) \Rightarrow (\forall t)\ 0<x(t)<1$

б) Наћи $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ у зависности од $x(0)=a\in\mathbb{R}$

а) $x' = x(1-x)$

$F(x,t)=x(1-x)$ је аутономно и C^1 $\qquad (x(1-x))'_x = 1-2x \in C^0$ ✓

↳ нема t

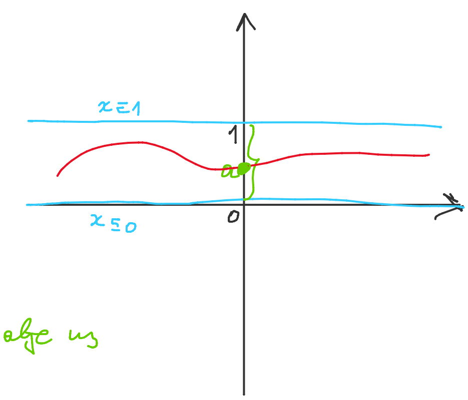
$\Downarrow$

важи Пикар! (у свакој тачки)

$x(0)=a\in(0,1)$

решења се не секу!

$\left.\begin{array}{l} x\equiv 0 \\ x\equiv 1 \end{array}\right\}$ јесу решења

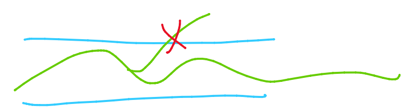


Свако решење

$x(0)=a\in(0,1)$

не сме да изађе из

траке $\mathbb{R}\times(0,1)$



$\Rightarrow (\forall t)\ 0<x(t)<1.$

б) $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$? $\quad x(0)=a\in\mathbb{R}$

$x' = x(1-x)$

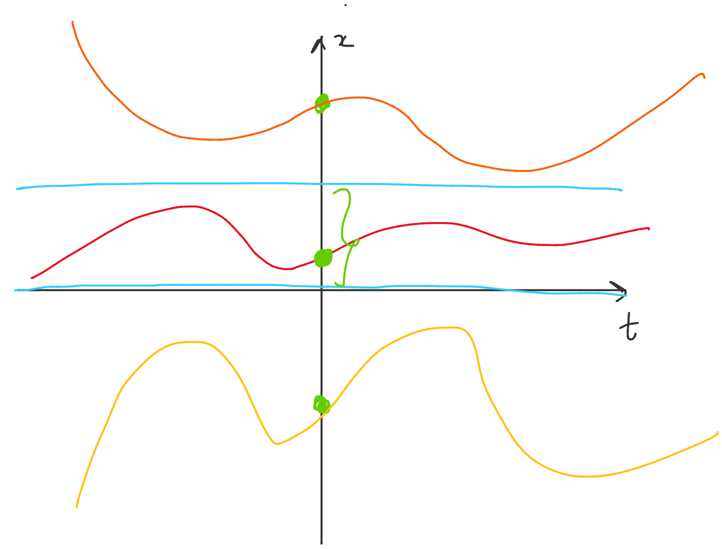
1° $a\in(0,1) \Rightarrow x(t)\in(0,1)$

2° $a>1 \Rightarrow x(t)>1$

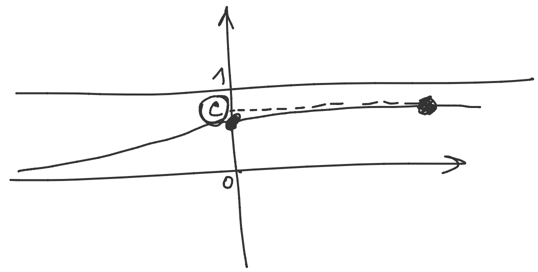
3° $a<0 \Rightarrow x(t)<0$

4° $a=1 \Rightarrow x(t)\equiv 1$ ✓

5° $a=0 \Rightarrow x(t)\equiv 0$ ✓



5° $a=0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$ ✓



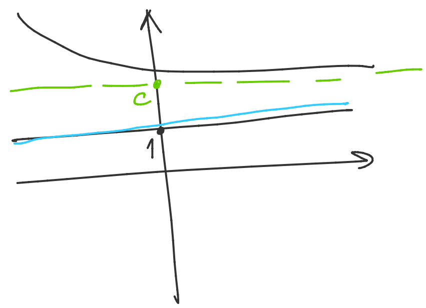
1° $x(t) \in (0,1)$

$$x'(t) = \underbrace{x(t)}_{>0} \cdot \underbrace{(1-x(t))}_{>0} > 0 \Rightarrow x \nearrow$$

хор. асимпт. не може пре 1:

$$\left.\begin{array}{l} x' \to 0 \quad (x(t) \to c), \quad c \in (0,1) \\ x' \to c\cdot(1-c) > 0 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ сва имају 1 за хор. асимпт.

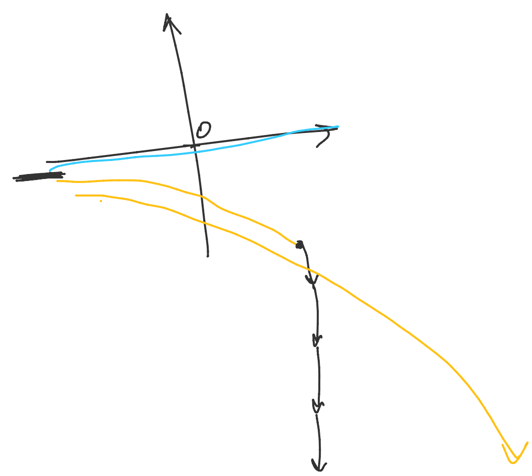


2° $x(t) > 1$

$$x'(t) = \underbrace{x(t)}_{>1} \cdot \underbrace{(1-x(t))}_{<0} < 0 \Rightarrow x \searrow$$

асимпт. мора бити 1, јер иначе

$$x'(t) \to 0$$
$$x(t) \to c$$
$$x'(t) \to c(1-c) \neq 0$$

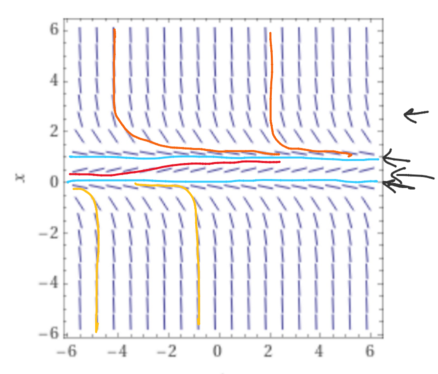


3° $x(t) < 0$

$$x'(t) = \underbrace{x(t)}_{<0} \cdot \underbrace{(1-x(t))}_{>1} < 0 \Rightarrow x \searrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x \to 0- \Rightarrow x' \to 0 \\ x \to -\infty \Rightarrow x' \to -\infty \end{array}\right\} x \to -\infty$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$



Фазни портрети

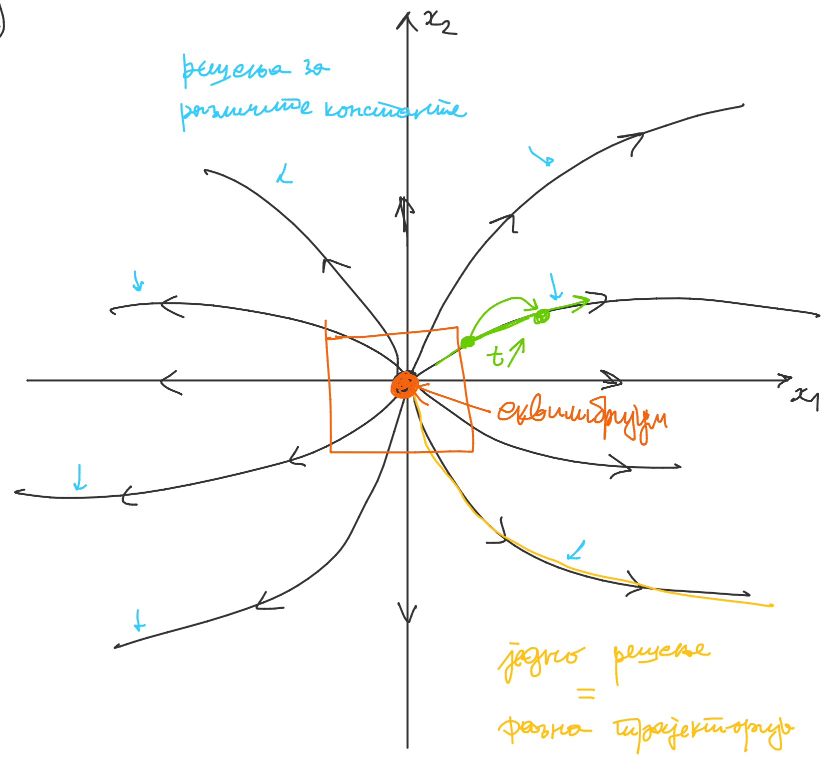
$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$

$\underbrace{X' = AX}_{\text{(динамички систем)}}$ → линеарна ДЈ (систем)

$\Big\}$ решења $\underbrace{X(t)}_{C \in \mathbb{R}^2}$ " $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ → параметарска крива

$A \in M_2(\underline{\mathbb{R}})$ ⇒ са конст. коеф. (ЛСДЈКК)

фазни портрет:



Еквилибријум: $X' = 0$

ЛСДЈКК: $\underbrace{A \cdot X = 0}_{\text{(лин. сист.)}}$ ⇒ X је вект. потпр. од $\mathbb{R}^2$ ⇒ еквилибријуми су,

- тачка (0,0)
- права кроз (0,0)
- $\mathbb{R}^2$

Линк ка материјалима из курса ДЈБ одакле је узет овај задатак. Пошто смо овде имали убрзани курс за скицирање фазних портрета, не очекује се да радите детаљно као у материјалима. Овде смо цртали само системе у сведеном облику, без додатне линеарне трансформације.
https://tinyurl.com/fazniPortreti1

(2) Скицирати фазни портрет динамичког система $X' = AX$, ако је:

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

г) $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; д) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; ђ) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Id = I$

јед. матр.

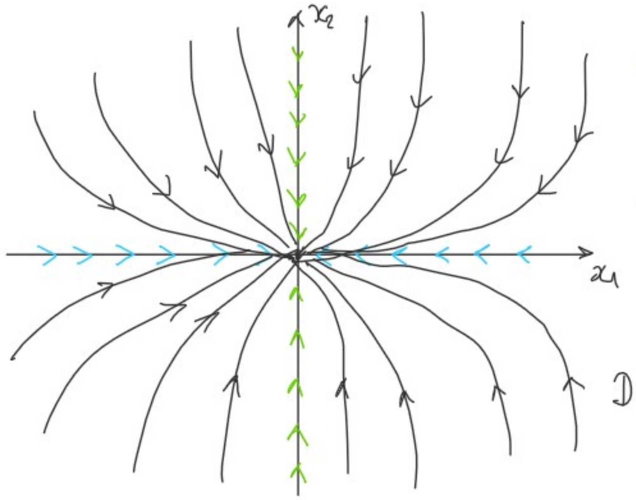
a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$

$(1+\lambda)(3+\lambda) - 0 = 0$

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -3 \longrightarrow$ стабилни чвор

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$



један еквилибријум:

$AX = 0$

$\left.\begin{aligned} -1x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -3x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$

$\det A \neq 0 \qquad X^* = (0, 0)$

X^* – ознака за еквилибријум

$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\left.\begin{aligned} &X' = AX \\ &A = PDP^{-1} \rightarrow \text{смена: } Y = P^{-1}X \end{aligned}\right\} \quad Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = \underbrace{P^{-1}AP}_{D} \cdot Y = D\,Y$

$D = P^{-1}AP$

сведена матрица:

1) $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ реалне

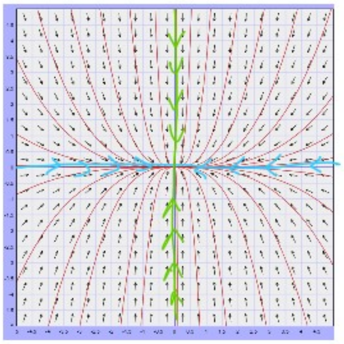
2) $D = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \qquad \alpha \pm i\beta$ conj. вр.

3) $D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \vee D = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ → 1 Жорданов блок

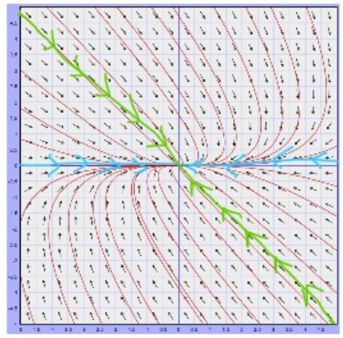
ми цртамо ФП само за сведену!

https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html

$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$



лин. трансф.



г) $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (в исто)

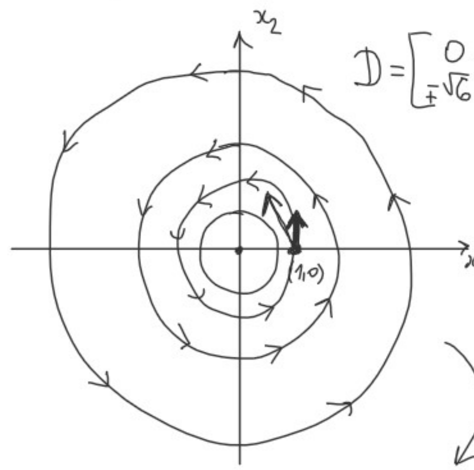
$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$ $(\alpha \pm i\beta)$

$\alpha = 0$ → центар

↓

периодичне трајекторије

$\left.\begin{matrix} \det A \neq 0 \\ 6 \neq 0 \end{matrix}\right\} X^* = (0,0)$



$D = \begin{bmatrix} 0 & \pm\sqrt{6} \\ \mp\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}$

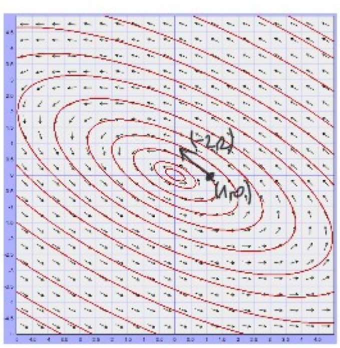
како су оријентисани кругови?

$X' = AX$

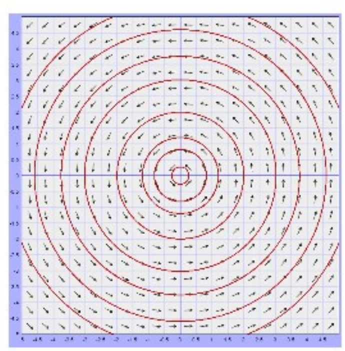
$X' = A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

A →



D



д) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\det A \neq 0 \Rightarrow X^* = (0,0)$

$\lambda_{1,2} = \underbrace{-2}_{\neq 0} \pm i$ → стабилна спирала ← $-2 < 0$

није центар

[−2 −1] (само промени смер)

$\lambda_{1,2}$ ... $\neq 0$ није центар

спирала

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\alpha = -2$

$\beta = 1$

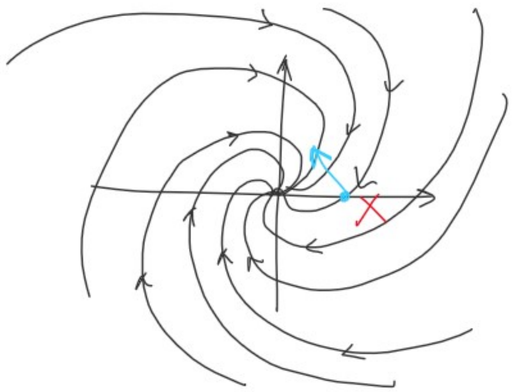
$$D = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$ (само промени смер)

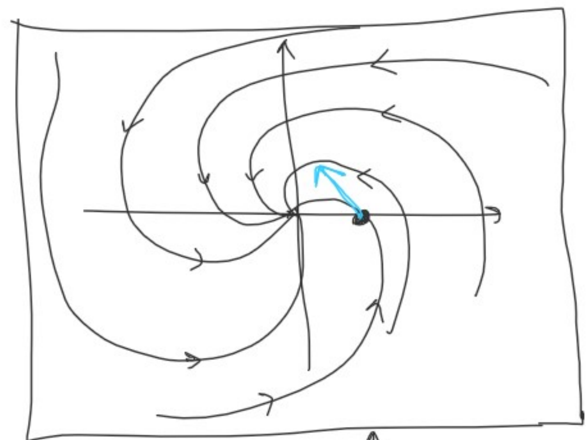
↓

смер ручно одредимо

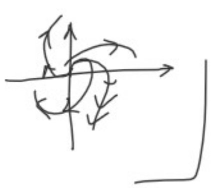
$\alpha = -2$

$\beta = -1$





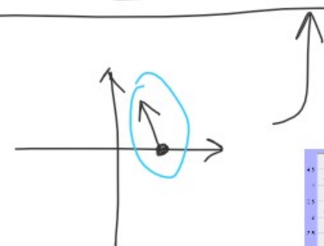
Нестабилно

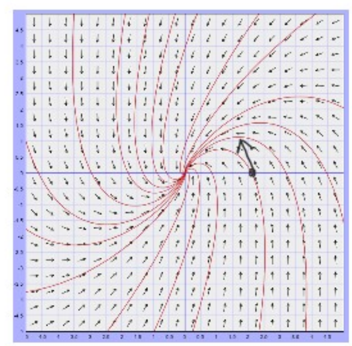


$x_1 = 1$

$x_2 = 0$

$$X' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$





(3) Скицирати фазни портрет динамичког система $X' = AX$, ако је:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ б) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ в) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ г) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ д) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

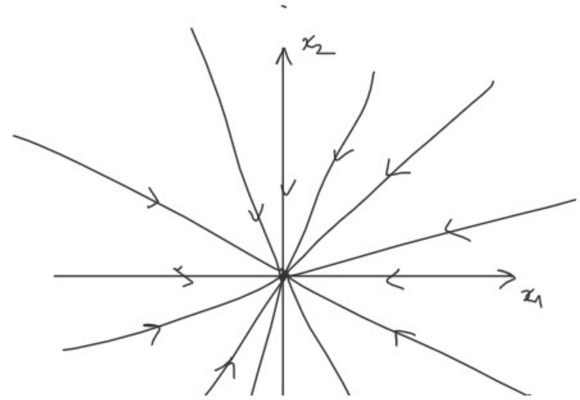
Линк ка материјалима из курса ДЈБ одакле је узет овај задатак. Пошто смо овде имали убрзани курс за скицирање фазних портрета, не очекује се да радите детаљно као у материјалима. Овде смо цртали само системе у сведеном облику, без додатне линеарне трансформације.
На крају фајла имате нека питања ако желите да више и боље разумете градиво. https://tinyurl.com/fazniPortreti2

б) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $X^* = (0,0)$

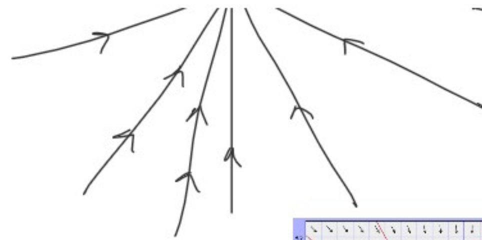
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -1$ ← већ дијагонална

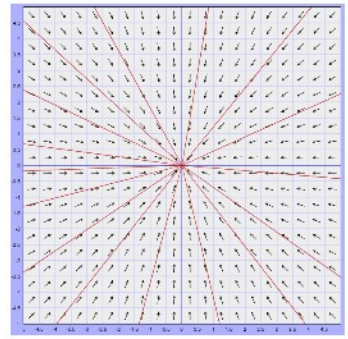
→ стабилна звезда (сингуларни чвор)

$\lambda < 0$



$-1<0$ (сингуларни чвор)





В) $A=\begin{bmatrix}3&1\\-4&-1\end{bmatrix}$

$(3-\lambda)(-1-\lambda)+4=0$

$\lambda^2-2\lambda-3+4=0$

$(\lambda-1)^2=0 \to \lambda_1=\lambda_2=\lambda=1$

$\begin{bmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$?

→колика је dim сопс. потпростора?

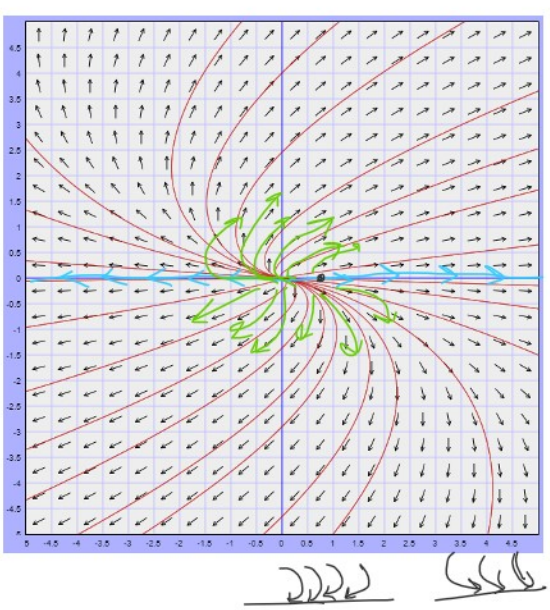
$(A-\lambda E)v=0 \qquad \begin{bmatrix}2&1\\-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{matrix}2\alpha+\beta=0\\ \cancel{-4\alpha-2\beta=0}\end{matrix} \Rightarrow \beta=-2\alpha \quad , v=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

$\dim = \dim \mathcal{L}in\left(\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right)=1 \Rightarrow D$ није дијагонална ($\dim<2$)

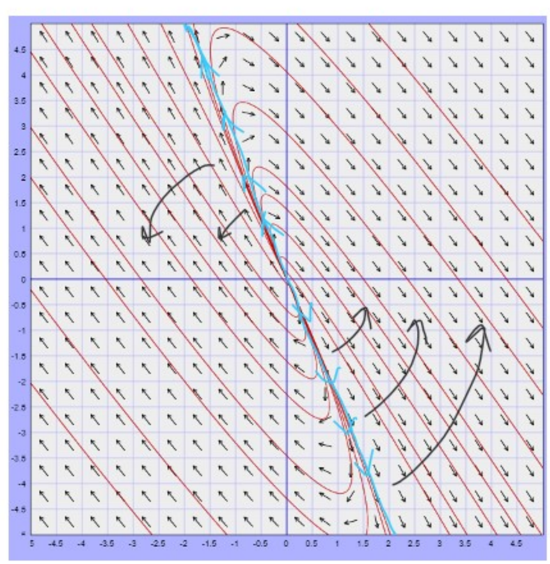
$\Rightarrow D$ има Жорданов блок $\Rightarrow D=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ нестабилни дегенерисани чвор

$\lambda=1>0$

D



нећемо смер одређивати



II) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$X^* = ?$ $\qquad A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}$ $\qquad X^* = (\lambda, 0),\ \lambda \in \mathbb{R}$

(неизоловани)

$X' = AX$

$\left.\begin{matrix} x_1' = 2x_2 \\ x_2' = 0 \end{matrix}\right\} \to x_2 = c \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1' = 2c \Rightarrow x_1 = 2ct + c_1$

$c_1 \in \mathbb{R}$

$(2ct + c_1, c)$

1° $c > 0$

2° $c < 0$

3° $\cancel{c = 0}$ ← еквилибријуми