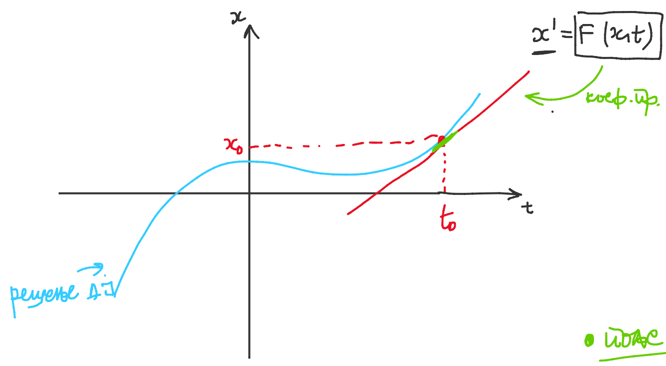
① Скицирати $\boxed{\text{поље праваца}}$ ДЈ $x' = F(x,t)$. Не решавајући ДЈ скицирати њене $\boxed{\text{интегралне криве}}$.

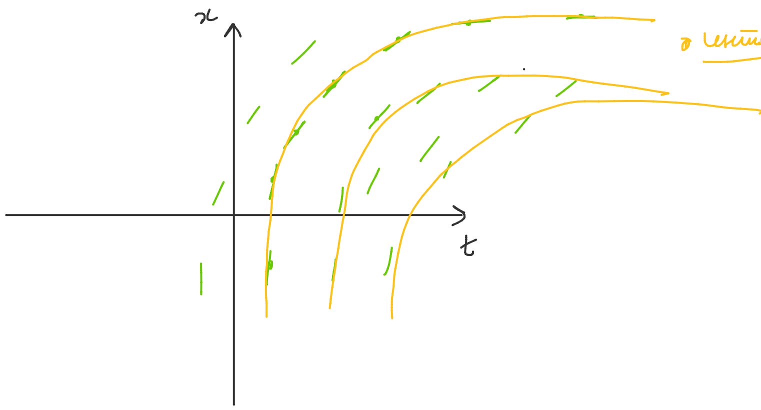
а) $F(x,t) = -\frac{t}{x}$

б) $F(x,t) = 1 + t - x$



• поље праваца ДЈ $\longleftrightarrow F(x,t)$

• интегралне криве



а) $x' = -\frac{t}{x}$

посматрамо (t,x): $x' = c \in \mathbb{R}$ ↳ нагиб

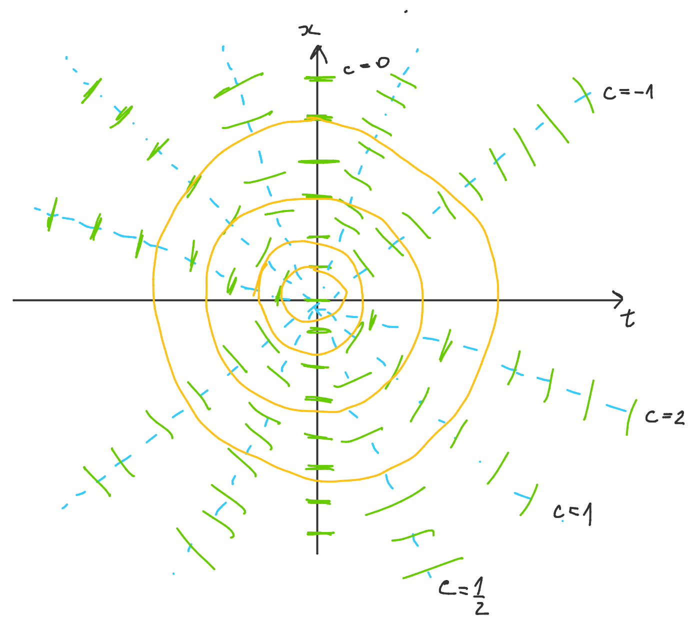
$-\frac{t}{x} = c \Rightarrow \underbrace{-t = cx}_{\text{праве кроз } (0,0)}$

$c = 0$: $t = 0$

$c = 1$: $-t = x$

$c = -1$: $-t = -x$
$x = t$

$c = 2$: $-t = 2x$
$x = -\frac{1}{2}t$



$c=\frac{1}{2}$: $\quad -t=\frac{1}{2}x$

$x=-2t$

$c=-\frac{1}{2}$: - - - -

б) $\quad x'=1+t-x$

$1+t-x=c$

$x=t+\underline{(1-c)}$ → праве $\parallel$ са $x=t$

$c=0$, $\quad x=t+\underline{1}$

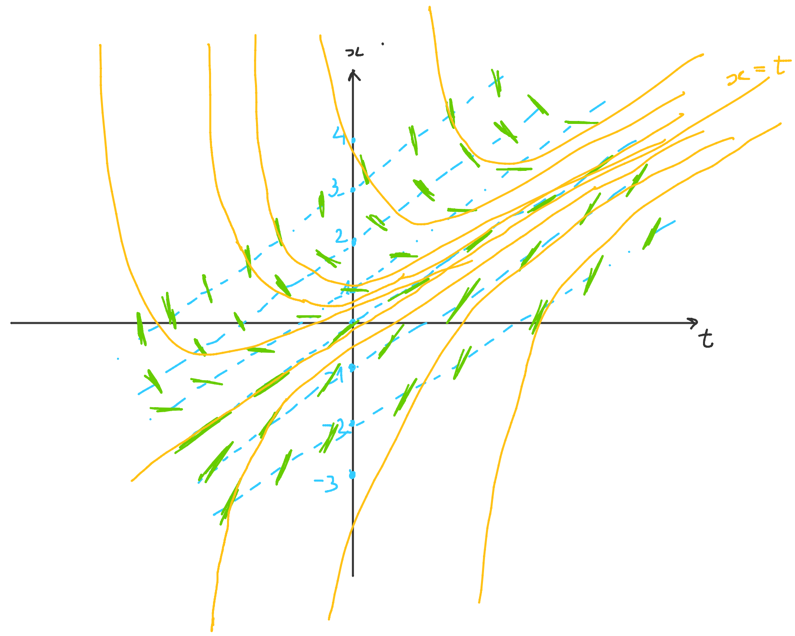
$c=1$: $\quad x=\underline{t}$ ← дуж праве

$c=2$: $\quad x=t\underline{-1}$

$c=3$: $\quad x=t\underline{-2}$

$c=-1$, $\quad x=t+\underline{2}$

$c=-2$: $\quad x=t+\underline{3}$



*све имају косу асимп. $x=t$

DJ-WM.nb - Wolfram Mathematica 12.0

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
In[1]:= (*Rešenje obične DJ*)
        solution1 = DSolve[x'[t] == x[t] + 2*t - 3, x[t], t]
Out[1]= {{x[t] → 1 - 2 t + e^t c1}}

In[2]:=
        (*Košijevo rešenje*)
        solution2 = DSolve[{x'[t] == x[t] + 2*t - 3, x[0] == 2}, x[t], t]
Out[2]= {{x[t] → 1 + e^t - 2 t}}

In[3]:=
        (*Još jedna DJ*)
        solution3 = DSolve[t*x'[t] - 2*t*Sqrt[x[t]] == 4*x[t], x[t], t]
Out[3]= {{x[t] → t^2 - 2 t^3 c1 + t^4 c1^2}}

In[4]:=
        (*Uprošćavanje*)
        solution4 = FullSimplify[solution3]
Out[4]= {{x[t] → t^2 (-1 + t c1)^2}}

In[5]:=
        (*Sistem DJ*)
        solution5 = FullSimplify[DSolve[{x'[t] == y[t] - z[t], y'[t] == x[t]^2 + y[t], z'[t] == x[t]^2 + z[t]}, {x[t], y[t], z[t]}, t]]
Out[5]= {{x[t] → e^(t-c3) + c1, y[t] → e^(2t-2c3) - c1^2 + e^(t-c3) (c1 + c2 + 2 c1 Log[e^(t-c3)]), z[t] → e^(2t-2c3) - c1^2 + e^(t-c3) (-1 + c1 + c2 + 2 c1 Log[e^(t-c3)])}}

In[6]:=
        (*Bez FullSimplify*)
        solution6 = DSolve[{x'[t] == y[t] - z[t], y'[t] == x[t]^2 + y[t], z'[t] == x[t]^2 + z[t]}, {x[t], y[t], z[t]}, t]
Out[6]= {{x[t] → e^-c3 (e^t + e^c3 c1), y[t] → (-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)) c2 + (-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)) (e^-c3 (e^t + e^c3 c1) - c1^2/(-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)) + 2 c1 Log[-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)]),
        z[t] → c1 - e^-c3 (e^t + e^c3 c1) + (-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)) c2 + (-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)) (e^-c3 (e^t + e^c3 c1) - c1^2/(-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)) + 2 c1 Log[-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)])}}
```

https://tinyurl.com/linkKaWA2

Пикарова и Пеанова теорема

Нека je $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал. Кажемо да je векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ локално униформно (по $t \in I$) Липшицово[1] по $\mathbf{x}$ ако свака тачка из $\mathcal{U}$ има околину $\mathcal{B}$ тако да важи $\|F(\mathbf{x},t) - F(\mathbf{y},t)\| \leq L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, за неко $L > 0$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{B}$, $t \in I$.

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^k$

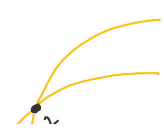
локалности

униформности

Теорема 67. (Пикарова[2] теорема.) *Нека je $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ непрекидно и локално униформно (по t) Липшицово по $\mathbf{x}$. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ и $t_0 \in I$ постоји $\delta > 0$ и јединствено решење*

$$\mathbf{x} : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathcal{U}$$

$\boxed{\text{E. !}}$



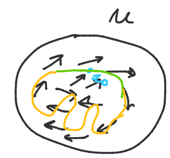
Теорема 67. (**Пикарова**[2] **теорема.**) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ непрекидно и локално униформно (по t) Липшицово по $\mathbf{x}$. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ и $t_0 \in I$ постоји $\delta > 0$ и јединствено решење*

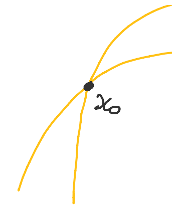
$$\mathbf{x} : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathcal{U}$$

Кошијевог проблема

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

$\boxed{\text{Е и Ј}}$





x_0

$[t_0-a, t_0+a]$

Теорема 112. (**Пеанова**[13] **теорема**) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times [-a, a] \to \mathbb{R}^k$ непрекидно. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ постоји $\delta > 0$ и (не нужно јединствено) решење Кошијевог проблема*

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(\cancel{0}) = \mathbf{x}_0 \tag{71}$$

t_0

дефинисано на интервалу $[-\delta, \delta]$.

$[t_0-\delta, t_0+\delta]$

$\boxed{\text{Е}}$

$\boxed{\text{локалне Т}}$

$\boxed{\text{Пикар} \iff \text{два решења не могу да се секу у } x_0\,!}$

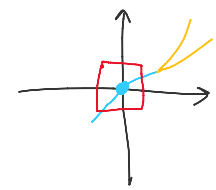
$k=1$ уравнаи

(2) Испитати егзистенцију и јединственост Кошијевих проблема $x = F(x,t)$, $x(0)=0$:

а) $F(x,t) = tx^3$

б) $F(x,t) = t^2|x|^{1/2}$

в) $F(x,t) = \dfrac{\ln x}{1-\operatorname{sgn} x} + t$



а) $F(x,t) = tx^3$

t, x^3 полиноми $\to$ непрекидно $\Rightarrow$ важи Пеанова Т $\Rightarrow \exists$ реш.

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\|F(x,t) - F(y,t)\| \overset{?}{\leq} L \cdot \|x-y\| \qquad x, y \in B(0)$$

$$|F(x,t) - F(y,t)| \leq L \cdot |x-y|$$

$$|tx^3 - ty^3| \leq L \cdot |x-y| \qquad \boxed{x(0) = 0}$$

$$|t| \cdot \cancel{|x-y|} \cdot |x^2+xy+y^2| \leq L \cdot \cancel{|x-y|}$$

$\to$ околина 0

$$|t| \cdot |x^2+xy+y^2| \leq L, \quad t \in [-\delta, \delta]$$

$x, y \in [-1, 1] \to$ околина 0

$$|t| \cdot |x^2+xy+y^2| \leq \delta \cdot (|x^2| + |xy| + |y^2|) \leq \delta \cdot (1+1+1) = 3\delta = L.$$

јесте Лип $\Rightarrow$ важи Пикар

(*) $|tx^3 - ty^3| = \underbrace{|t|}_{\text{небитно}} \cdot \boxed{|x^3 - y^3|} \to$ не зависи од t

$\Downarrow$ ако је C^1 фја

Лип.

$$L = \max\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|.$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \max|f'(\xi)| \cdot |x-y|$$

$x \mapsto x^3$ је $C^1 \Rightarrow$ Лип.

б) $F(x,t) = t^2|x|^{1/2}$

$\left.\begin{array}{l} t^2 \\ |x| \\ \sqrt{|x|} \end{array}\right\}$ непр. $\overset{\text{Пеано}}{\Rightarrow} \exists$ реш.

$$\left.\begin{array}{l} t^2 \\ |x| \\ \sqrt{|x|} \\ t^2\cdot\sqrt{|x|} \end{array}\right\} \text{непр.} \overset{\text{Пеано}}{\Longrightarrow} \exists \text{ реш.}$$

$$|F(x,t)-F(y,t)| = \left| t^2\sqrt{|x|} - t^2\sqrt{|y|} \right| = \underbrace{|t^2|}_{\substack{\text{у некој околини } 0 \\ |t^2|\le 1}} \cdot \left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \le \boxed{\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \overset{?}{\le} L\cdot|x-y|}$$

доказаћемо да $L \nexists$

x, y – у некој околини нуле су

$\boxed{\begin{array}{c} y=0 \\ x\to 0 \end{array}}$

$$\left|\sqrt{|x|}\right| \le L\cdot|x|$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|x|^{-1/2} \le L$$

$$x\to 0: \quad \frac{1}{\sqrt{|x|}} \le L$$

$$\infty \le L \quad ↯$$

$\Rightarrow$ не задовољава Липшица!

НЕ ЗНАЧИ да решење није јединствено

$$x' = t^2\sqrt{|x|} \qquad x \equiv 0 \checkmark$$

$x>0$: $\quad \dfrac{x'}{\sqrt{x}} = t^2 \; / \int$

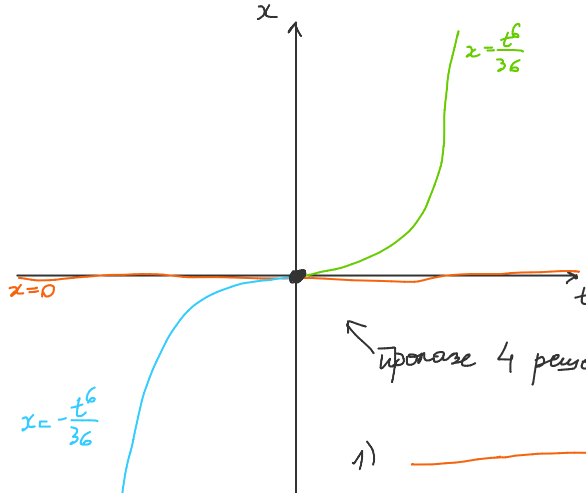
$$2\sqrt{x} = \frac{t^3}{3} + c \qquad x(0)=0 \Rightarrow c=0$$

$$2\sqrt{x} = \frac{t^3}{3}$$

$$\boxed{x = \frac{t^6}{36}}$$

$x<0$: ...

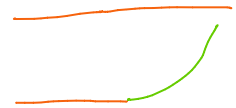
$$x = -\frac{t^6}{36}$$



пролазе 4 решења

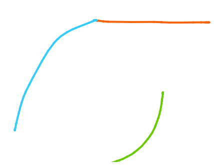
1)

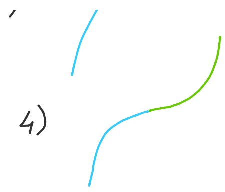
2)



$$\left(t \mapsto \frac{t^6}{36}\right) \in C^\infty$$

3)





$\Rightarrow$ није јединствено!

в) $F(x,t) = \dfrac{\ln x}{1-\operatorname{sgn} x} + t$

$\left.\begin{array}{l} \ln x \Rightarrow x>0 \\ 1-\operatorname{sgn} x \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sgn} x \neq 1 \Leftrightarrow \neg(x>0) \end{array}\right\}$ решења нема

(3) $x' = x(1-x)$. Без решавања:

а) Свако решење $x(0)=a\in(0,1) \Rightarrow (\forall t)\ 0<x(t)<1$.

б) Наћи $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ у зависности од $x(0)=a\in\mathbb{R}$.

а) $x'=x(1-x)$ задовољава Пикара! ✓

$F(x,t)=x(1-x)$ је аутономно и C^1

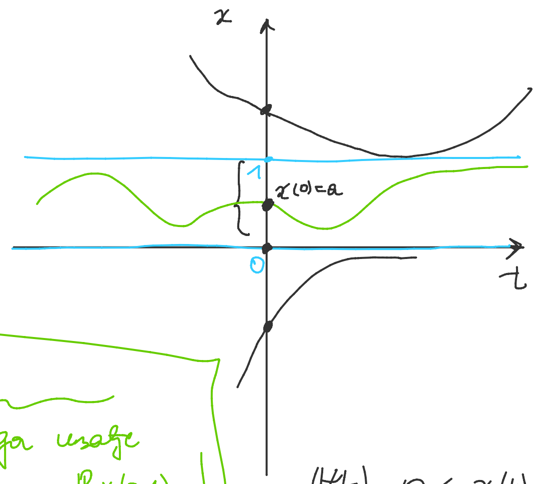
$\left(x(1-x)\right)'_x = 1-2x \in C^0$ ✓ $\Rightarrow$

решења се не секу!

$x\equiv 0$ ✓

$x\equiv 1$ ✓

не сме да изађе изван траке $\mathbb{R}\times(0,1)$!



$\Rightarrow (\forall t)\ 0<x(t)<1$.

б) 1° $a\in(0,1) \Rightarrow x(t)\in(0,1)$

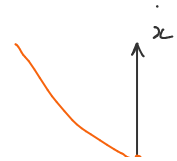
2° $a>1 \Rightarrow x(t)>1$

3° $a<0 \Rightarrow x(t)<0$

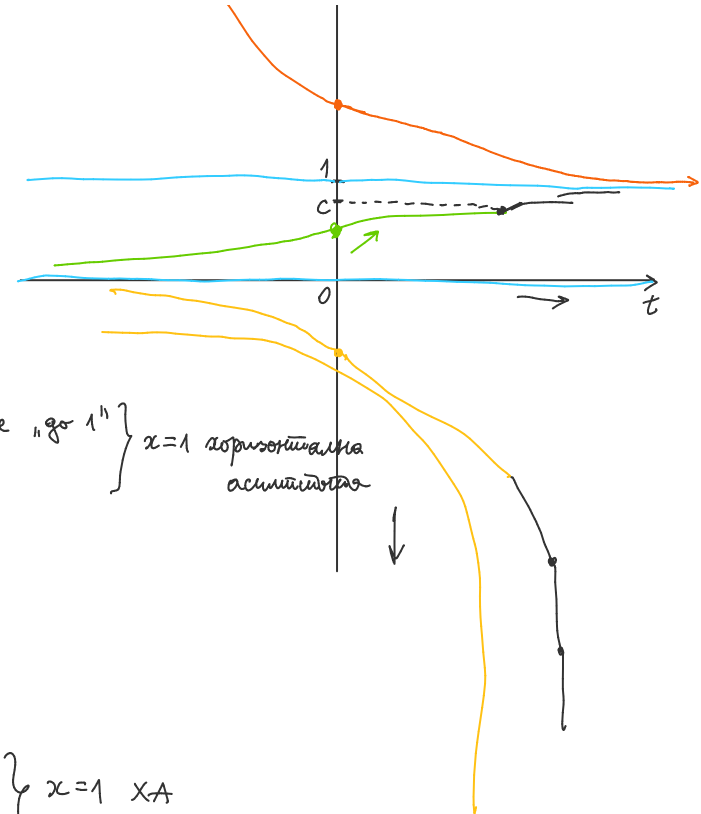
4° $a=0 \Rightarrow x\equiv 0$ ✓

5° $a=1 \Rightarrow x\equiv 1$ ✓

$x'=x(1-x)$



5° $a=1 \Rightarrow x \equiv 1$ ✓



1° $x(t) \in (0,1)$

$$x'(t) = \underbrace{x(t)}_{>0} \cdot \underbrace{(1-x(t))}_{>0} > 0 \Rightarrow x \nearrow$$

$$x(t) = c < 1$$

$x'(t) = \underline{c(1-c)} > 0 \Rightarrow$ мора да расте све „до 1" } $x=1$ хоризонтална асимптота

$x \to 1- \Rightarrow x' \to 0+$

2° $x(t) > 1$

$$x'(t) = \underbrace{x(t)}_{>0} \cdot \underbrace{(1-x(t))}_{<0} < 0 \Rightarrow x \searrow$$

$x(t) = c > 1 \Rightarrow x'(t) = c\cdot(1-c) < 0$ } $x=1$ ХА

$x \to 1+ \Rightarrow x' = 0-$

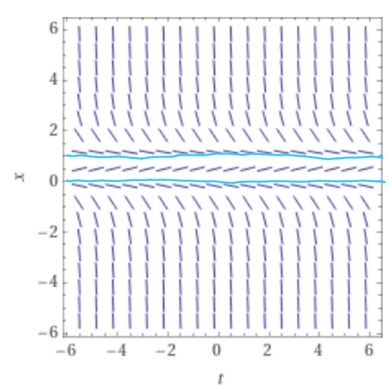
3° $x(t) < 0$

$$x'(t) = \underbrace{x(t)}_{<0} \cdot \underbrace{(1-x(t))}_{>0} < 0 \Rightarrow x \searrow$$

$x(t) = c < 0 \Rightarrow x'(t) = c(1-c) < 0$

$x \to 0- \Rightarrow x' \to 0-$ } $x \to -\infty$

$x \to \infty \Rightarrow x' \to -\infty$



$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} 1, & a>0 \\ 0, & a=0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases}$$