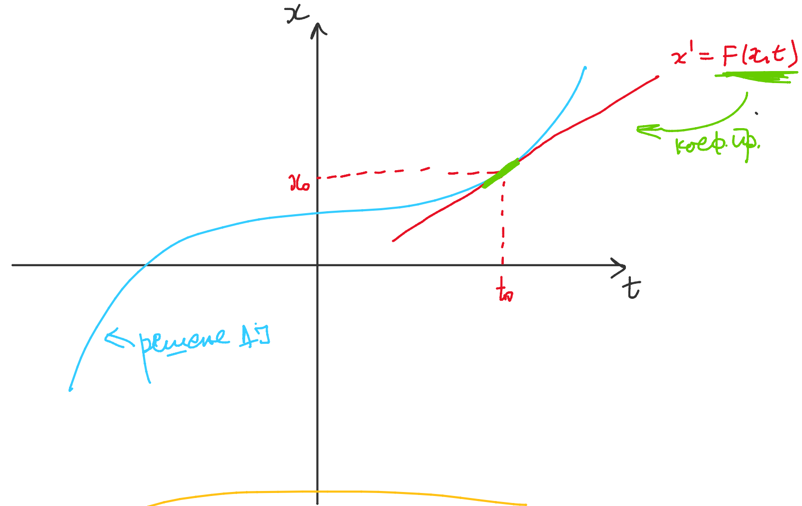
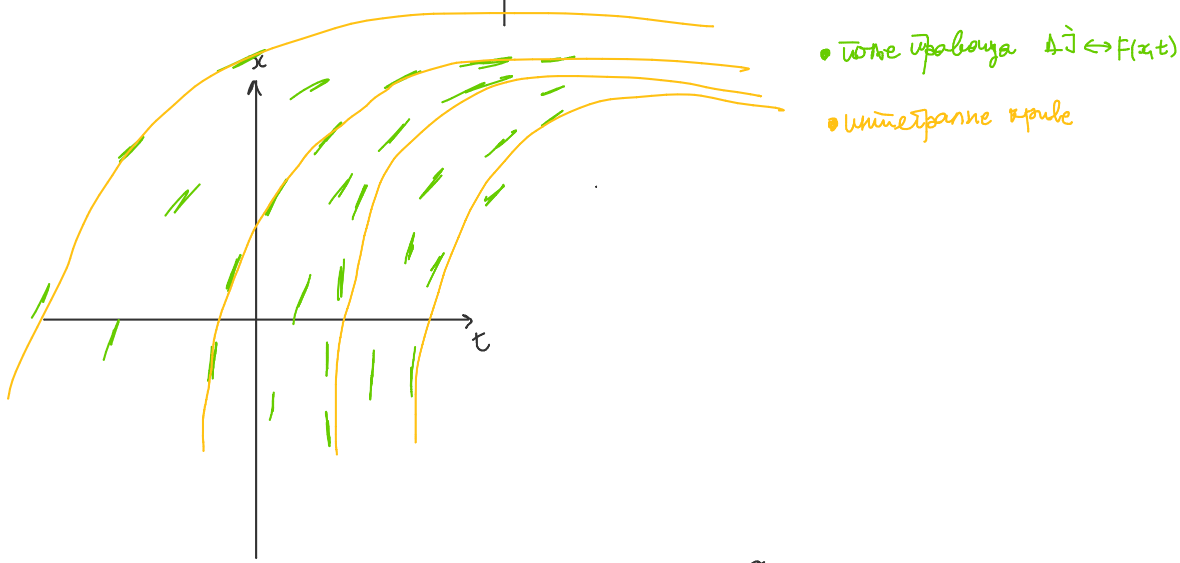
① Скицирати поље правца ДЈ $x' = F(x,t)$. Не решавајући ДЈ скицирати њене интегралне криве

а) $F(x,t) = -\frac{t}{x}$

б) $F(x,t) = 1 - t - x$





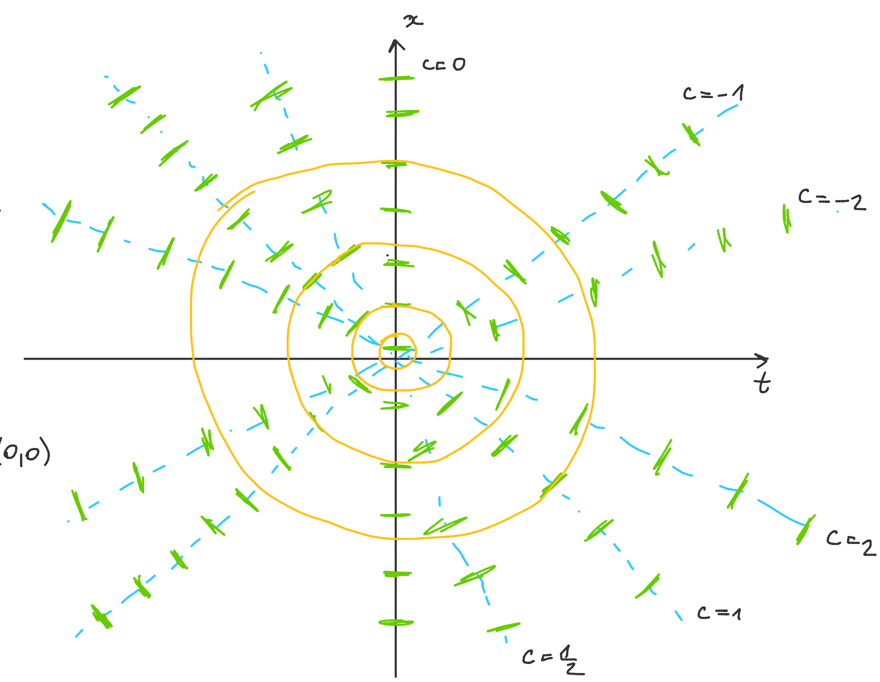
а) $x' = -\frac{t}{x}$

Посматрамо (t,x): $x' = \underbrace{c}_{\text{нагиб}} \in \mathbb{R}$

$-\frac{t}{x} = c$

$\underbrace{-t = c \cdot x}_{\text{права кроз } (0,0)}$

$c = 0$: $t = 0$



$c=1:$ $\quad -t=x$

$x+t=0$

$c=-1:$ $\quad -t=-x$

$x=t$

$c=2:$ $\quad -t=2x$

$x=-\frac{1}{2}t$

$c=-2:$ $\quad -t=-2x$

$x=\frac{1}{2}t$

$c=\frac{1}{2}:$ $\quad -t=\frac{1}{2}x$

$x=-2t$

$c=-\frac{1}{2}:$ ...

б) $x'=1+t-x$

$1+t-x=c$

$x=t+\underline{(1-c)}$ → праве $\parallel$ са $x=t$

$c=0:$ $\quad x=t+1$

$c=1:$ $\quad x=t$ ← решење

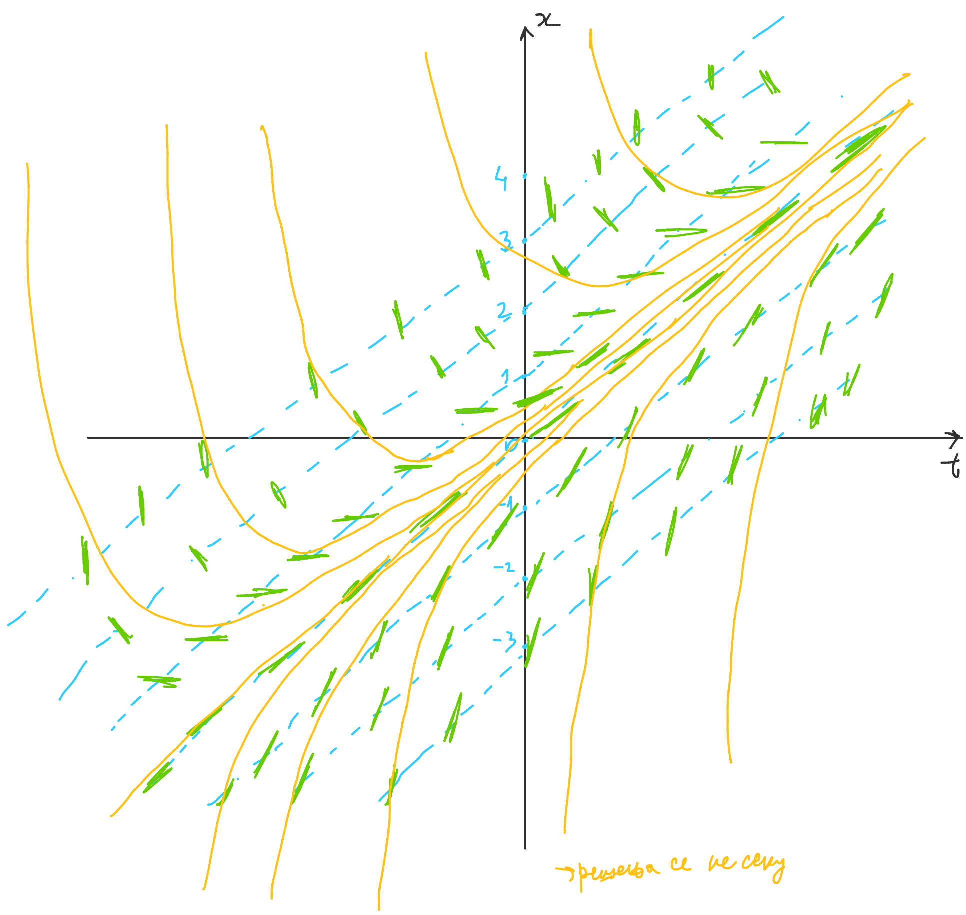
$c=2:$ $\quad x=t-1$

$c=3:$ $\quad x=t-2$

$c=-1:$ $\quad x=t+2$

$c\in(-2,0):$ ...

$c=-2:$ $\quad x=t+3$



→решења се не секу

*сва решења имају косу асимптоту $x=t$

DJ-WM.nb - Wolfram Mathematica 12.0

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
In[1]:= (*Rešenje obične DJ*)
solution1 = DSolve[x'[t] == x[t] + 2*t - 3, x[t], t]
Out[1]= {{x[t] -> 1 - 2 t + e^t c1}}

In[2]:=
(*Košijevo rešenje*)
solution2 = DSolve[{x'[t] == x[t] + 2*t - 3, x[0] == 2}, x[t], t]
Out[2]= {{x[t] -> 1 + e^t - 2 t}}

In[3]:=
(*Još jedna DJ*)
solution3 = DSolve[t*x'[t] - 2*t*Sqrt[x[t]] == 4*x[t], x[t], t]
Out[3]= {{x[t] -> t^2 - 2 t^3 c1 + t^4 c1^2}}

In[4]:=
(*Uprošćavanje*)
solution4 = FullSimplify[solution3]
Out[4]= {{x[t] -> t^2 (-1 + t c1)^2}}

In[5]:=
(*Sistem DJ*)
solution5 = FullSimplify[DSolve[{x'[t] == y[t] - z[t], y'[t] == x[t]^2 + y[t], z'[t] == x[t]^2 + z[t]}, {x[t], y[t], z[t]}, t]]
Out[5]= {{x[t] -> e^(t-c3) + c1, y[t] -> e^(2t-2c3) - c1^2 + e^(t-c3) (c1 + c2 + 2 c1 Log[e^(t-c3)]), z[t] -> e^(2t-2c3) - c1^2 + e^(t-c3) (-1 + c1 + c2 + 2 c1 Log[e^(t-c3)])}}

In[6]:=
(*Bez FullSimplify*)
solution6 = DSolve[{x'[t] == y[t] - z[t], y'[t] == x[t]^2 + y[t], z'[t] == x[t]^2 + z[t]}, {x[t], y[t], z[t]}, t]
Out[6]= {{x[t] -> e^-c3 (e^t + e^c3 c1), y[t] -> (-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)) c2 + (-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)) (e^-c3 (e^t + e^c3 c1) - c1^2/(-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)) + 2 c1 Log[-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)]),
  z[t] -> c1 - e^-c3 (e^t + e^c3 c1) + (-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)) c2 + (-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)) (e^-c3 (e^t + e^c3 c1) - c1^2/(-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)) + 2 c1 Log[-c1 + e^-c3 (e^t + e^c3 c1)])}}
```

https://tinyurl.com/linkKaWA2

Пикарова и Пеанова Т

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^k$

Нека је $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал. Кажемо да је векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ локално униформно (по $t \in I$) Липшицово[1] по $\mathbf{x}$ ако свака тачка из $\mathcal{U}$ има околину $\mathcal{B}$ тако да важи $\|F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, t)\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, за неко $L > 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}$, $t \in I$. $\forall t \in I$

Теорема 67. (Пикарова[2] теорема.) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ непрекидно и локално униформно (по t) Липшицово по $\mathbf{x}$. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ и $t_0 \in I$ постоји $\delta > 0$ и јединствено решење*

$\subseteq \mathbb{R}^{k+1}$

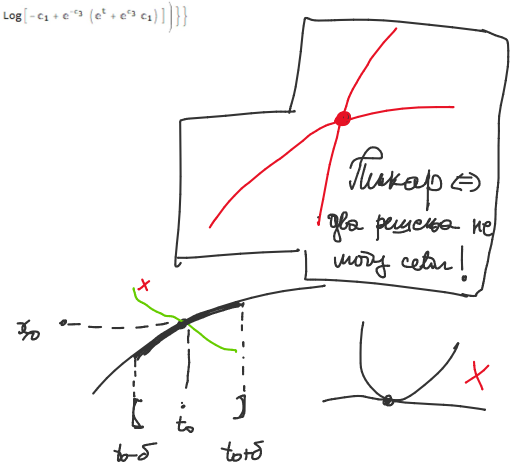
$$\mathbf{x} : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathcal{U}$$

Кошијевог проблема

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

$\boxed{\exists \text{ и } \dot{\exists}}$

$\boxed{\text{локалне Т}}$



Теорема 112. (Пеанова[13] теорема) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times [-a, a] \to \mathbb{R}^k$ непрекидно. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ постоји $\delta > 0$ и (не нужно јединствено) решење Кошијевог проблема*

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(\cancel{0}_{t_0}) = \mathbf{x}_0 \tag{71}$$

дефинисано на интервалу $[-\delta, \delta]$.

$[-\delta + t_0, \delta + t_0]$

$\boxed{\exists}$

$F : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$

$k=1$ удавнан $\quad \underline{x}' = F(\underline{x}, t)$

(2) Испитати егзистенцију и јединственост Кошијевих проблема $x' = F(x,t)$, $x(0) = 0$:

а) $F(x,t) = t x^3$

б) $F(x,t) = t^2 |x|^{1/2}$

в) $F(x,t) = \dfrac{\ln x}{1 - \operatorname{sgn} x} + t$

а) $F(x,t) = t x^3$

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

t, x^3 полиноми $\Rightarrow$ F непрекидна $\overset{\text{Пеано}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ реш.

$\| F(x,t) - F(y,t) \| \leq L \cdot \|x - y\|$, за $t \in [-a, a]$

$x, y \in \mathcal{B}(0)$

$\mathcal{B}(0) = [-b, b]$

$k=1$

$|F(x,t) - F(y,t)| \leq L \cdot |x - y|$

$|t x^3 - t y^3| \leq L \cdot |x - y|$

$|t|\cdot|\cancel{x-y}|\cdot|x^2+xy+y^2| \le L\cdot|\cancel{x-y}|$

$|t|\cdot|x^2+xy+y^2| \le a\cdot\left(|x^2|+|xy|+|y^2|\right) \le \boxed{3\cdot a\cdot b^2 = L}$

константа за фиксиране a, b

јесте Лип. ⇒ важи Пикар

E+J

б) $|tx^3-ty^3| = \underbrace{|t|}_{\text{небитно}}\cdot\boxed{|x^3-y^3|}$ не зависи од t

C^1 фја

$|f(x)-f(y)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\max}\cdot|x-y|$

$L = \max\underbrace{\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|}_{f'(x)}$

$x \mapsto x^3$ је C^1 ⇒ лок. Лип.

б) $F(x,t) = t^2|x|^{1/2}$

$\left.\begin{array}{l} t^2 \\ |x| \\ \sqrt{|x|} \\ t^2\cdot\sqrt{|x|} \end{array}\right\}$ непр $\overset{\text{Пеано}}{\Rightarrow}$ $\exists$ реш.

$|F(x,t)-F(y,t)| = |t^2\sqrt{|x|}-t^2\sqrt{|y|}| = \underbrace{|t^2|}_{}\cdot|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}| \le \boxed{|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}| \overset{?}{\le} L\cdot|x-y|}$

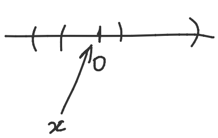
у некој окол нуле $|t^2|\le 1$

доказаћемо да L не постоји (у околини нуле)

у свакој!

$x(0)=0$

$y=0$, $x\to 0$:



$|\sqrt{|x|}| \le L\cdot|x| \quad /:|x|$

$\Leftrightarrow$

$|x|^{-1/2} \le L$

$x\to 0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{|x|}} \le L$

$\downarrow$

$+\infty$

опачно ↯

⇒ не важи услов из Пикара

$\boxed{\text{НЕ ЗНАЧИ}}$ да решење није јединствено!

$x' = t^2|x|^{1/2} \xrightarrow{x=0?} x \equiv 0$ ✓

$\frac{x'}{\sqrt{|x|}} = t^2 \quad /\int$

1) $x>0$

$\frac{x'}{\sqrt{x}} = t^2 \quad /\int$

$2\sqrt{x} = \frac{t^3}{3} + C$

продужимо реш.

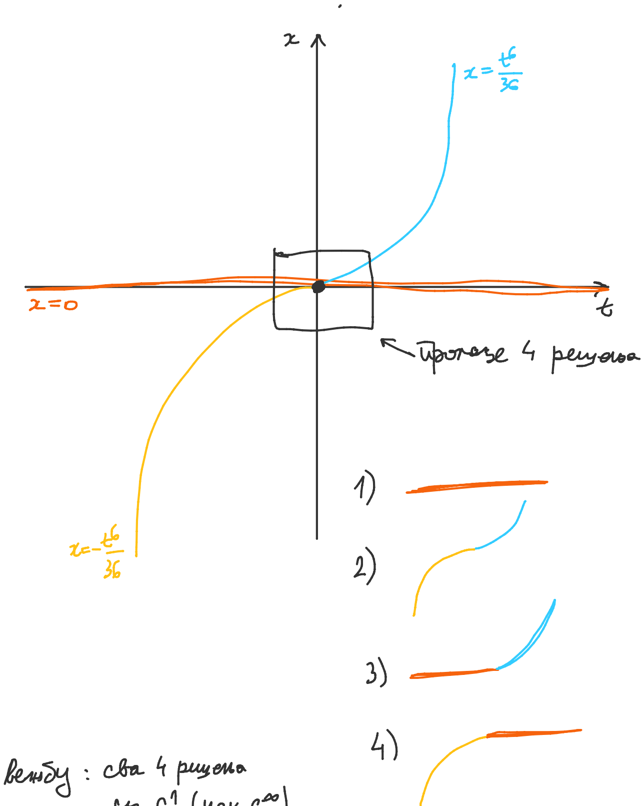
$t\to 0,\ x\to 0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow x = \frac{t^6}{36}$

2) $x<0$

$\frac{x'}{\sqrt{-x}} = t^2 \quad /\int$

$\vdots$

$x = -\frac{t^6}{36}$



За вежбу: сва 4 решења су C^1 (чак C^∞)

$\left(t \mapsto \frac{t^6}{36}\right)$ је C^∞

B) $F(x,t) = \frac{\ln x}{1-\operatorname{sgn} x} + t$

$\ln x \Rightarrow x>0$

$1-\operatorname{sgn} x \neq 0 \iff \operatorname{sgn} x \neq 1 \iff \neg(\operatorname{sgn} x = 1) \iff \neg(x>0) \iff x \leq 0$ } ↯

$\Rightarrow$ нема решења