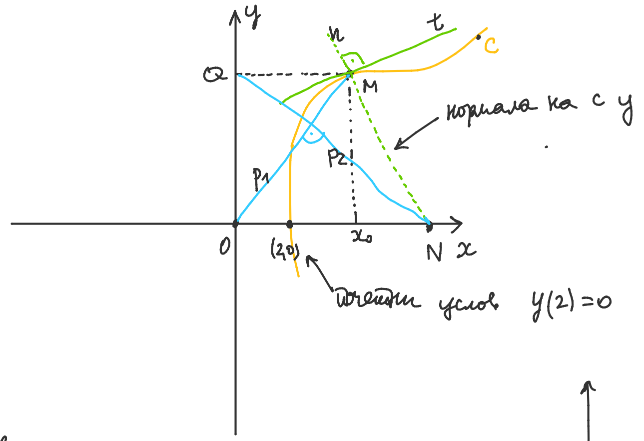
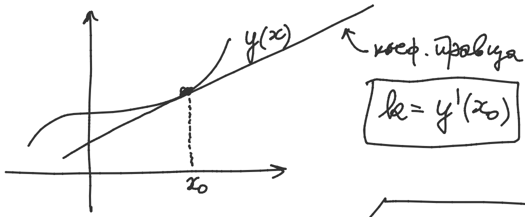
(*) Тачка (свака) M криве c се пројектује на y-осу у Q, а нормала на c у M сече x-осу у N. Нека је O коорд. почетак. Ако $QN \perp OM$ и крива c пролази кроз $(2,0)$, одредити c.

$c: y(x) = ?$



Где је овде диференцијална једначина?



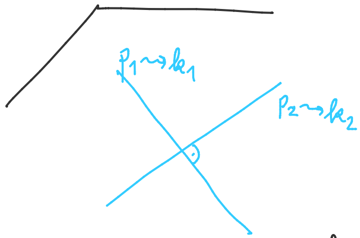
$M(x_0, y(x_0)) \longrightarrow Q(0, y(x_0))$

$O(0,0)$, $N(x_N, 0)$

$k_t = y'(x_0) \Rightarrow k_n = -\dfrac{1}{k_t}$

кроз M и N

$k_n = \dfrac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \dfrac{y(x_0) - 0}{x_0 - x_N}$?



$p_1 \perp p_2 \iff k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$

$$-\frac{1}{y'(x_0)} = \frac{y(x_0)}{x_0 - x_N}$$

$$\Rightarrow x_0 - x_N = -y(x_0)\, y'(x_0) \Rightarrow x_N = x_0 + y(x_0) \cdot y'(x_0)$$

$QN \perp OM$:

$$OM = p_1: \quad k_1 = \frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{y(x_0)}{x_0}$$

$$QN = p_2: \quad k_2 = \frac{y_N - y_Q}{x_N - x_Q} = \frac{0 - y(x_0)}{(x_0 + y(x_0) \cdot y'(x_0)) - 0} = -\frac{y(x_0)}{x_0 + y(x_0) \cdot y'(x_0)}$$

$k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$

$$\frac{y(x_0)}{x_0} = \frac{x_0 + y(x_0) \cdot y'(x_0)}{y(x_0)} \qquad (\forall x_0)$$

ДЈ
x_0 - променљива $\quad x_0 \to x$
y - фја $\quad y(x_0) \to y$

$$\frac{y}{x} = \frac{x + y y'}{y} \Rightarrow \boxed{y^2 = x^2 + x y y' \ , \ y(2) = 0}$$

$z = y^2$

$z = x^2 + x \dfrac{z'}{2} \rightarrow$ лин

7. ДЈ са тоталним диференцијалом

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0$$

$\exists F(t,x)$ $\qquad \underline{dF(t,x)} = \underline{M(t,x)\,dt} + \underline{N(t,x)\,dx}$

$$= \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\,dx$$

$$\left.\begin{matrix} M = F'_t \\ N = F'_x \end{matrix}\right\} \Rightarrow M'_x = N'_t$$

$x' = \dfrac{f(t,x)}{g(t,x)} \iff \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{f(t,x)}{g(t,x)}$

$\iff f(t,x)\,dt = g(t,x)\,dx$ у диференцијалном облику

$\iff f(t,x)\,dt - g(t,x)\,dx = 0$

Како да знамо да имамо ДЈ са тот.д.?

$$\text{ТОТ.Д.} \Rightarrow \underline{M'_x = N'_t}$$

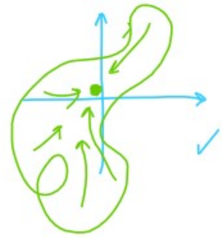
важи и $\boxed{\Leftarrow}$ — ако радимо у просто-повезаној области (што нама треба)

тамо где је деф-на, или где је посматрамо

Просто-повезане (ПП) области

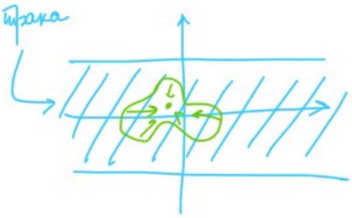
D је ПП $\iff$ сваку непрекидну затворену криву у D можемо скупити у тачку кроз D.

пр. 1) $\mathbb{R}^2$



✓

2) трака



✓

„ПП ако нема рупе (у $\mathbb{R}^2$)"

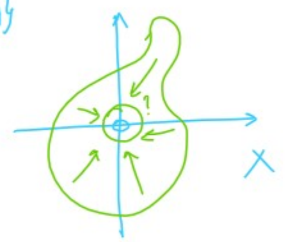
у вишим дим НЕ!

→ $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ јесте ПП

→ $\mathbb{R}^3 \setminus p$ није ПП

права

3) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



✗

$$\underline{0 = M\,dt + N\,dx = dF}$$

ОР: $F(t,x) = c,\ c \in \mathbb{R}$ ⟵ имплицитно задато

(1) а) $2t\left(1+\sqrt{t^2-x}\right)dt - \sqrt{t^2-x}\,dx = 0$

б) $(1 + x^2 \sin 2t)\,dt - x^2\cos^2 t\,dx = 0$

в) $(t\ln x + tx)\,dt + (x\ln t + tx)\,dx = 0$

г) $(tx^2 + 3t^2x)\,dt + (t^3 + t^2x)\,dx = 0$

2) $M(t,x)=2t(1+\sqrt{t^2-x})$

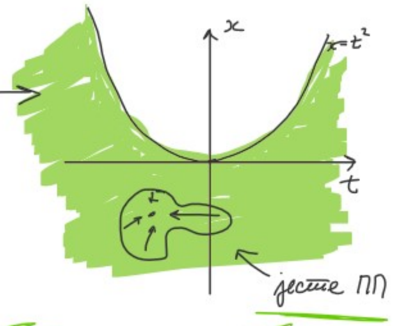
$N(t,x)=-\sqrt{t^2-x}$

$$M'_x = 2t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t^2-x}}\cdot(-1)$$

$$\| \qquad \Rightarrow M'_x = N'_t \longrightarrow \text{ТОТ. Д.}$$

$$N'_t = -\frac{1}{2\sqrt{t^2-x}}\cdot 2t$$

област? $t^2-x\geq 0$, $x\leq t^2$



$\exists F$, $dF = M\,dt+N\,dx$, ОР: $\underset{?}{F}=c$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M = 2t+2t\sqrt{t^2-x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = N = -\sqrt{t^2-x} \xrightarrow{\int dx} F(t,x) = \frac{2}{3}(t^2-x)^{3/2} + \underbrace{\varphi(t)}_{(c?)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{t^2-x}\cdot 2t + \varphi'(t) = 2t+2t\sqrt{t^2-x}$$

$\Rightarrow \varphi'(t)=2t$ ← ако не добијемо да зависи само од t → ГРЕШКА!

$$\downarrow$$

$$\varphi(t)=t^2$$

ОР: $\boxed{\frac{2}{3}(t^2-x)^{3/2}+t^2=c, \ c\in\mathbb{R}}$

8 Интеграциони фактор

$$M(t,x)\,dt+N(t,x)\,dx=0$$

$M'_x \neq N'_t \Rightarrow$ није ТОТ. Д.

Идеја: $\mu(t,x)\cdot\big(M(t,x)\,dt+N(t,x)\,dx\big)=0$ ← ТОТ. Д.

$\mu : \underset{\subseteq\mathbb{R}}{A}\to\mathbb{R}$

$w : \underset{\subseteq\mathbb{R}^2}{D}\to\mathbb{R}$

$\mu(t,x)$ често у облику $\mu=\mu(w)=\mu(w(t,x))$

Предавања:
$$\frac{\mu'(w)}{\mu(w)} = \frac{N'_t - M'_x}{w'_x M - w'_t N}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{N'_t - M'_x}{w'_x M - w'_t N}\,dw \quad /\int$$

← мора да зависи само од w

Циљ: нађи w!

Честе:
- $w(t,x)=at+bx$ $(w=x, w=t, \dots)$
- $w(t,x)=a\ln|t|+b\ln|x|$
- $w(t,x)=f(t)\cdot g(x)$

Проверити $\frac{1}{\mu}=0$ за решење које је изгубљено у рачуну

$\cdot\ w(t,x) = f(t)\cdot g(x)$

$\cdot\ w(t,x) = f(t)+g(x)$

(2) а) $(q(t)-p(t)x)\,dt - dx = 0$, p, q познате ← упоредити са линеарном ДЈ , $(w=t)$

б) $2tx\ln x\,dt + (t^2+x^2\sqrt{x^2+1})\,dx = 0$

в) $x(2-3tx^2)\,dt - t(1+tx^2)\,dx = 0$, на области $G=\{t>0, x>0\}$, решење пролази кроз $(2,1)$.

г) $(\sqrt{t^2-x}+2t)\,dt - dx = 0$, μ у облику $\mu(t^2-x)$ $(w=t^2-x)$

д) $(t+2)\sin x\,dt + 2t\cos x\,dx = 0$ $(w=x)$

$$\left(x' = \frac{dx}{dt} = -\frac{(t+2)}{2t}\operatorname{tg} x \right)$$

б) $$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{N_t' - M_x'}{w_x'\cdot M - w_t'\cdot N}\,dw = \frac{\overbrace{2t-2t(1+\ln x)}^{=-2t\cdot\ln x}}{w_x'\cdot(2tx\ln x) - \underbrace{w_t'\cdot(t^2+x^2\sqrt{x^2+1})}_{0}}\,dw = \frac{-2t\cdot\ln x}{1\cdot(2t\ln x\cdot x) - 0\cdot(--)}\,dw = -\frac{1}{x}\,dw = -\frac{dw}{w}$$

$w=x$ → најједноставније

поништило се

$N_t' = 2t$

$M_x' = 2t(x\ln x)' = 2t(1+\ln x)$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dw}{w} \quad / \int$$

$$\ln|\mu| = -\ln|w| \quad \cancel{(+c)}$$

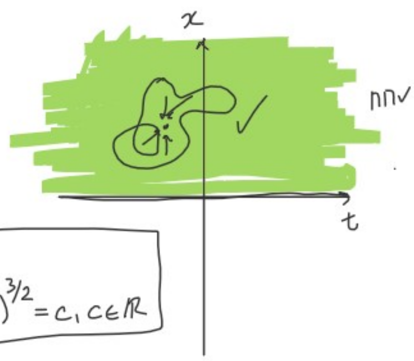
$$\Downarrow$$

$$\mu = \frac{1}{w}$$

$$\mu(t,x) = \mu(w(t,x)) = \frac{1}{w(t,x)} = \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{\mu} = 0 \Leftrightarrow \underset{(\ln x)}{x=0} \ \times$$

$2t\ln x\,dt + \left(\frac{t^2}{x} + x\sqrt{x^2+1}\right)dx = 0$ ТОТ.Д? ✓

области? $x>0$ $(\ln x)$



$F = ?$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= 2t\ln x \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{t^2}{x} + x\sqrt{x^2+1} \end{aligned}\right\} \ldots \boxed{\begin{gathered}\text{ОРі}\\ F(t,x) = t^2\ln x + \tfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} = c,\ c\in\mathbb{R}\end{gathered}}$$

в) $$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{N_t' - M_x'}{w_x'\cdot M - w_t'\cdot N}\,dw = \frac{\overbrace{-1-2tx^2-2+9tx^2}^{=-3+7tx^2}}{w_x'\cdot(2x-3tx^3) + w_t'(t+t^2x^2)}\,dw = \frac{-3+7tx^2}{b(2-3tx^2)+a(1+tx^2)}\,dw = \frac{-3+7tx^2}{(2b+a)+(-3b+a)tx^2}\,dw$$

$M(t,x) = x(2-3tx^2)$

$N(t,x) = -t(1+tx^2)$

$x \longleftrightarrow t$ еквивалентно

$N(t,x) = -t(1+tx^2)$

$M'_x = 2 - 9tx^2$

$N'_t = -1 - 2tx^2$

$x \xleftrightarrow{\text{експоненти}} t$

$\left.\begin{array}{l} ?\ w'_x = \frac{1}{x}? \\ \ \ w'_t = \frac{1}{t}? \end{array}\right\}$ $w = a\cdot \ln t + b\cdot \ln x$ ← пробамо

$(t>0, x>0)$

$w'_x = \frac{b}{x}, \quad w'_t = \frac{a}{t}$

• хоћемо да буду сразмерни и да се скрате: $\left.\begin{array}{l} -3 = 2b + a \\ 7 = -3b + a \end{array}\right\} - \Rightarrow \begin{array}{l} -10 = 5b \\ b = -2 \\ a = 1 \end{array}$

$w = \ln t - 2\ln x, \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{-3+7tx^2}{-3+7tx^2} = 1\,dw \ \Big/ \int$

$\ln|\mu| = w$

$\mu = e^w$

$\mu(t,x) = \mu(w(t,x)) = e^{\ln t - 2\ln x} = \frac{t}{x^2}$

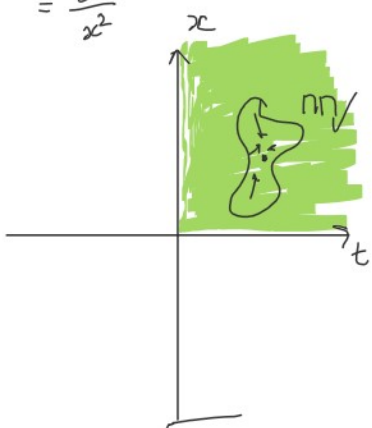
$\left(2\frac{t}{x} - 3t^2x\right)dt - \left(\frac{t^2}{x^2} + t^3\right)dx = 0$

област?

$\underline{\underline{G}}$

$\Downarrow$

ТОТ. Д ✓



$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial t} = 2\frac{t}{x} - 3t^2x \\ \frac{\partial F}{\partial x} = -\left(\frac{t^2}{x^2} + t^3\right) \end{array}\right\} \cdots \ F(t,x) = \underbrace{\frac{t^2}{x} - t^3\cdot x} = c, \ c \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{\mu} = 0?$

$\frac{x^2}{t} = 0? \Rightarrow x = 0?$

$(0\cdot dt - \ldots d0 = 0\ ✓)$

$\{x=0\} \cap G = \emptyset$

није решење!

кроз $(2,1)$: $\frac{4}{1} - 8\cdot 1 = c \Rightarrow c = -4$

$t=2$

$x=1$

ПР: $\boxed{\frac{t^2}{x} - t^3x = -4}$