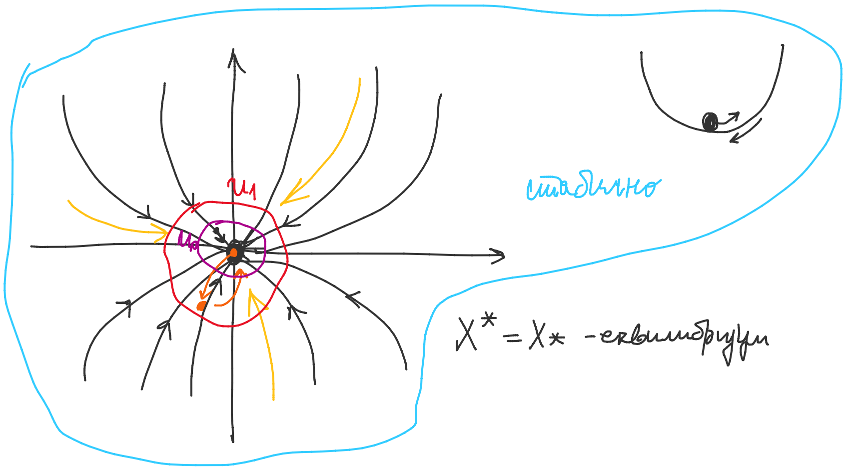
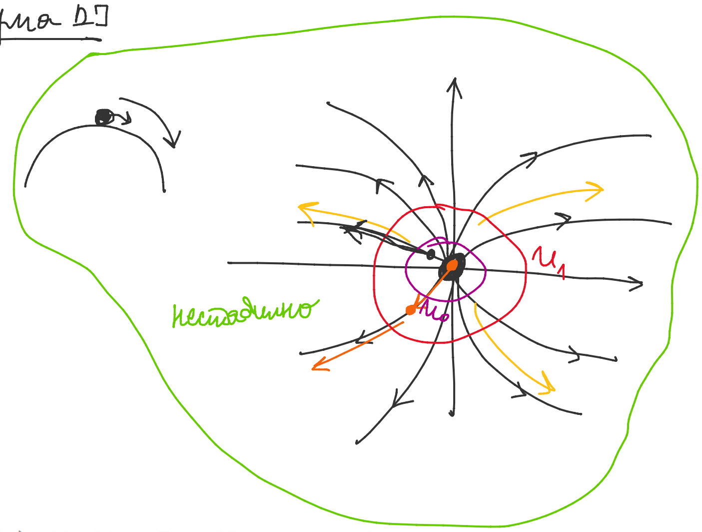
Стабилност еквилибријума ДС



$X^* = X_*$ - еквилибријум



Дефиниција 129. Нека је $\mathbf{x}_*$ еквилибријум система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$. Кажемо да је $\mathbf{x}_*$

- *стабилни еквилибријум* ако за сваку околину $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$ постоји околина $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_0 \ni \mathbf{x}_*$, таква да важи

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}_1, \quad t \geq 0,$$

  где је ϕ^t решење система

$$\frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{Id};$$

$X' = AX$

$\phi^t(x_0) = \phi_t(x_0) = e^{tA} \cdot x_0$

ток

- *асимптотски стабилни еквилибријум* ако је стабилни еквилибријум и ако још важи:

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \phi^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_*;$$

- *нестабилини еквилибријум* ако није стабилни.

1. Скицирати фазне портрете динамичких система, а затим испитати (по дефиницији) стабилност њихових еквилибријума:

а) $x_1' = -x_1 + 2x_2$, $x_2' = -3x_2$ б) $x_1' = -x_1 + 3x_2$, $x_2' = 5x_1 - 3x_2$ в) $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$.

$X_* = (0,0)$ – једини за све $\quad (X' = 0)$

$X' = AX \Rightarrow \phi^t(x_0) = \boxed{e^{tA}} \cdot x_0$

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\quad \phi^t(x_0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot x_0 \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

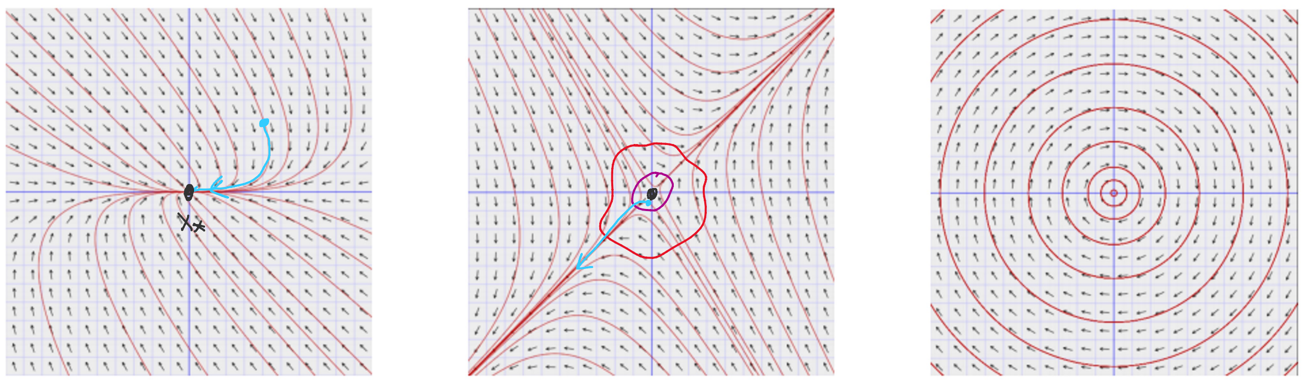
$e^{-t} \to 0$

$e^{-3t} \to 0$

$x_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $\quad \lim\limits_{t\to+\infty} \phi^t(x_0) = \lim\limits_{t\to+\infty} \begin{bmatrix} e^{-t} \cdot a + b \cdot (e^{-t} - e^{-3t}) \\ b \cdot e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = X_*$

$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -3$

асимптотски стабилан



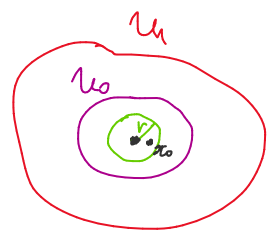
а) б) в)

б) $\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = -6$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \phi^t(x_0) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5e^{2t}+3e^{-6t} & 3e^{2t}-3e^{-6t} \\ 5e^{2t}-5e^{-6t} & 3e^{2t}+5e^{-6t} \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$(\exists U_1)(\forall U_0)\ x_0 \in U_0 \wedge \phi^t(x_0) \notin U_1$ (за някое $t \geq 0$)

$U_0 \subseteq U_1$



U_1, U_0 – произв.

$(\exists r > 0)\quad B(x_*; r) \subset U_0$

$x_0 = \begin{bmatrix} r/2 \\ 0 \end{bmatrix} \in U_0$

$e^{2t} \to +\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} \|\phi^t(x_0)\| = \lim_{t\to\infty} \left\| \frac{r}{16}\left(5e^{2t}+3e^{-6t},\ 5e^{2t}-5e^{-6t}\right)\right\| = +\infty$$

$\Rightarrow (\exists t \geq 0)\quad \phi^t(x_0) \notin U_1$

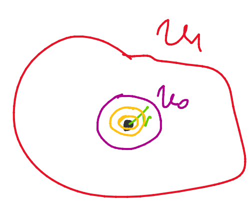
нестабилна

в) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_{1/2} = \pm i$

$$\phi^t(x_0) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$\|\phi^t(x_0)\| = \|x_0\|$ ← проверити



U_1 – произв.

$U_0 = B(x_*; r) \subseteq U_1$

$x_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(x_0) \in \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}_1$ ✓

$\lim_{t \to +\infty} \phi^t(x_0) \neq x_*$

} стабилан (али не асимптотски)

T1 **Теорема 140.** *Нека је* $L := dF(\mathbf{x}_*)$ *линеарни оператор такав да је* $\boxed{\mathrm{Re}(\lambda) < 0}$ *за сваку сопствену вредност* λ *и нека је*

$$V(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2,$$

где је $\|\cdot\|$ *норма Љапунова придружена оператору* L *као у Напомени 139. Тада је* V *строга функција Љапунова из тачке (в) Теореме 132, па је* $\mathbf{x}_*$ *асимптотски стабилни еквилибријум система* $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$.

T2 **Теорема 142.** *Ако је* $\mathbf{x}_*$ *стабилни еквилибријум, тада не постоји сопствена вредност матрице* $dF(\mathbf{x}_*)$ *чији је реални део строго позитиван.* } $\exists \lambda, \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow x_*$ нестабилан

$x' = F(x)$, $F: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ $\qquad x = (x_1, \dots, x_n)$

$dF(x_*) \in M_n(\mathbb{R})$ $\qquad F = (F_1, \dots, F_n)$

$$dF(x_*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_*) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_*) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_*) \end{bmatrix} = L$$

2. Испитати стабилност еквилибријума из задатка 1 помоћу (методе теореме Љапунова) о сопственим вредностима.

$X' = AX \Rightarrow \underbrace{F(x) = A \cdot x}_{\text{линеарна}} \Rightarrow dF(x) = A \Rightarrow dF(x_*) = A$

а) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$, $\mathrm{Re}(-1), \mathrm{Re}(-3) < 0 \overset{T1}{\Rightarrow} x_*$ ас. ст.

б) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -6$, $\mathrm{Re}(2) > 0 \overset{T2}{\Rightarrow} x_*$ нестабилан

в) $\lambda_{1/2} = \pm i$, $\mathrm{Re}(i) = \mathrm{Re}(-i) = 0 \Rightarrow$ не знамо из теорема

3. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$x_1' = e^{x_1} - e^{-3x_3} = 0 \overset{e^{\,1-1}}{\Rightarrow} x_1 = -3x_3$$
$$x_2' = 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow 4x_3 = 3\sin(x_1 + x_2)$$
$$x_3' = \ln(\cancel{1} - 3x_1 + x_3), = 0 \Rightarrow -3x_1 + x_3 = 0$$

а затим испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0, 0, 0)$.

$X_* = ?$ $\qquad X' = 0$

$x_1 = -3x_3 = -3 \cdot (3x_1) = -9x_1$

$\Rightarrow x_1 = x_3 = 0$

$0 = 3\sin x_2 \Rightarrow \sin x_2 = 0$

$\Downarrow$

$x_2 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$X_* \in \{(0, k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$x_* = X_* = (0,0,0)$, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ $(\mathcal{U} = \{1 - 3x_1 + x_3 > 0\})$, $F = (F_1, F_2, F_3)$

$$F_1(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1} - e^{-3x_3}$$
$$F_2(x_1,x_2,x_3) = 4x_3 - 3\sin(x_1+x_2)$$
$$F_3(x_1,x_2,x_3) = \ln(1 - 3x_1 + x_3)$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$$dF(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & 3e^{-3x_3} \\ -3\cos(x_1+x_2) & -3\cos(x_1+x_2) & 4 \\ \frac{-3}{1-3x_1+x_3} & 0 & \frac{1}{1-3x_1+x_3} \end{bmatrix}$$

$$dF(x_*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$\Downarrow$$

$\lambda_1 = -3$

$\lambda_{2/3} = 1 \pm 3i$

$\left.\begin{array}{l} Re(\lambda_1) = -3 \\ Re(\lambda_2) = Re(\lambda_3) = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X_* = (0,0,0)$ је нестабилни еквилибријум

У формулацији Теореме Љапунова[1] користићемо традиционалну ознаку $V'(\mathbf{x})$ за извод функције V дуж решења система:

$$V'(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}(V(\phi^t)(\mathbf{x})), \quad \text{за} \quad \frac{d}{dt}\phi^t(\mathbf{x}) = F(\phi^t(\mathbf{x})),\ \phi^0 = \mathrm{Id}.$$

Одавде је

$$V'(\mathbf{x}) = dV(\phi^t(\mathbf{x}))(F(\phi^t(\mathbf{x})) = \langle \nabla V(\phi^t(\mathbf{x})), F(\phi^t(\mathbf{x}))\rangle.$$

Теорема 132. (Теорема Љапунова.) *Нека је $\mathbf{x}_*$ еквилибријум система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ и нека је функција $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ дефинисана на некој околини $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$, таква да је*

- *V класе C^1 на $\mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$*
- *$V(\mathbf{x}) > 0$ за $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$, $V(\mathbf{x}_*) = 0$.*

Тада ако је

(а) *$V'(\mathbf{x}) \le 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ (одакле следи да V опада дуж решења система), тада постоји околина тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је свако решење које почиње у тој околини дефинисано за свако $t \ge 0$; осим тога, $\boxed{\mathbf{x}_* \text{ је стабилни еквилибријум;}}$*

(б) *$V'(\mathbf{x}) < 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ (одакле следи да V строго опада дуж решења система), тада постоји околина тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је свако решење које почиње у тој околини дефинисано за свако $t \ge 0$; осим тога, $\boxed{\mathbf{x}_* \text{ је асимптотски стабилни еквилибријум;}}$*

(в) *$V'(\mathbf{x}) > 0$ за $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ (одакле следи да V строго расте дуж решења система), тада је $\boxed{\mathbf{x}_* \text{ нестабилни еквилибријум.}}$*

Функција V се зове *функција Љапунова*.

4. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$x_1' = (x_3 + 1)(2x_2 - x_1)$$
$$x_2' = -(x_3 + 1)(x_1 + x_2)$$
$$x_3' = -x_3^3,$$

а затим испитати њихову стабилност.

* урађено на предавањима помоћу ф-је Љапунова $(V(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2)$

$X_* = (0,0,0)$

$$dF(x) = \begin{bmatrix} -x_3-1 & 2x_3+2 & 2x_2-x_1 \\ -x_3-1 & -x_3-1 & -x_1-x_2 \\ 0 & 0 & -3x_3^2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow L = dF(x_*) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2/3} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$Re(\lambda_1) = 0$

не можемо ништа закључити методом сопс. вр!

5. Доказати да је координатни почетак стабилан, али не и асимптотски стабилан еквилибријум система $X' = AX$, где је $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0,0)$ система:

а) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_1x_2^2 \\ -x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ б) $X' = AX + \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 \\ x_2^3 + x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ в) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$

Показати да је у сва три случаја матрица $dF(\mathbf{0})$ једнака и да метод сопствених вредности не даје одговор.

домаћи! (1в)

$dF(x_*) = A$

нпр. под а: $X' = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2 \\ x_1 - x_2^3 - x_1^2 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = F$

$$dF(x) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_1x_2 \\ 1 - 2x_1x_2 & -3x_2^2 - x_1^2 \end{bmatrix}$$

$$dF(x_*) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A \rightsquigarrow \lambda_{1/2} = \pm i$$

(исто б, в)

а) $X' = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2 \\ x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix}$

$V(x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_2^2 \longrightarrow \nabla V(x_1,x_2) = (2ax_1, 2bx_2)$

$$\langle \nabla V(x_1,x_2), F(x_1,x_2) \rangle = 2ax_1 \cdot (-x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2) + 2bx_2 \cdot (x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2) =$$

$$= -2ax_1x_2 - 2ax_1^4 - 2ax_1^2x_2^2 + 2bx_1x_2 - 2bx_2^4 - 2bx_1^2x_2^2 =$$

$$= 2x_1x_2(b-a) + \underbrace{2x_1^2x_2^2(-a-b)}_{-2(a+b)} - 2ax_1^4 - 2bx_2^4$$

$a, b = ?$

- V је C^1 на $U \setminus \{(0,0)\}$ ✓
- $V > 0$ на $U \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow a > 0, b > 0$ ✓

$V(0,0)=0$ ✓

- $V' \leq 0$, $V'<0$, $V'>0$?

$a=b(=1)$: $V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$

$$\langle \nabla V, F\rangle = -4x_1^2x_2^2-2x_1^4-2x_2^4 = -2\left(x_1^4+x_2^4+2x_1^2x_2^2\right) = -2\left(x_1^2+x_2^2\right)^2 < 0, \quad U\setminus\{x_*\}$$

$\Rightarrow$ асимпт. ст.

б) $V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$

$$\langle \nabla V, F\rangle = \langle (2x_1, 2x_2), (-x_2+x_1^3+x_1x_2^2, x_1+x_2^3+x_1^2x_2)\rangle = 2x_1^4+2x_2^4+4x_1^2x_2^2 = 2(x_1^2+x_2^2)^2 > 0$$

на $U\setminus\{x_*\}$

$\Rightarrow$ нест.

в) $V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$

$\langle \nabla V, F\rangle = \ldots = 0 \Rightarrow$ стабилни екв.

6. Испитати стабилност положаја равнотеже $X^* = (0,0)$ динамичког система

$$x_1' = -\sin x_2$$
$$x_2' = x_1.$$

домаћи: метод сопст. вр. не даје одговор

$F(x_1,x_2)=(-\sin x_2, x_1)$

Пробамо: $\langle \nabla V, F\rangle = 0$?

$\nabla V = (x_1, \sin x_2)$?

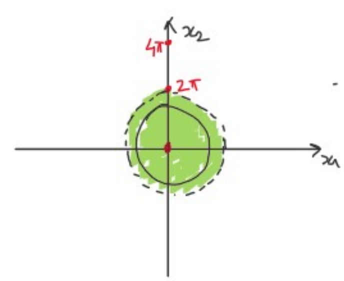
додали да би $V(x_*)=0$

$$V(x_1,x_2)=\frac{x_1^2}{2}+1-\cos x_2 :$$

- V је C^1 ✓
- $V(x_*)=\frac{0^2}{2}+1-\cos 0=0$

$V(x)>0$, за $\underbrace{x_1\neq 0 \lor \cos x_2\neq 1}$

важи на $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2<(2\pi)^2\}\setminus\{x_*\}$



- $\langle \nabla V, F\rangle = \langle (x_1, \sin x_2), (-\sin x_2, x_1)\rangle = 0$

$\Rightarrow x_* = (0,0)$ је стабилан