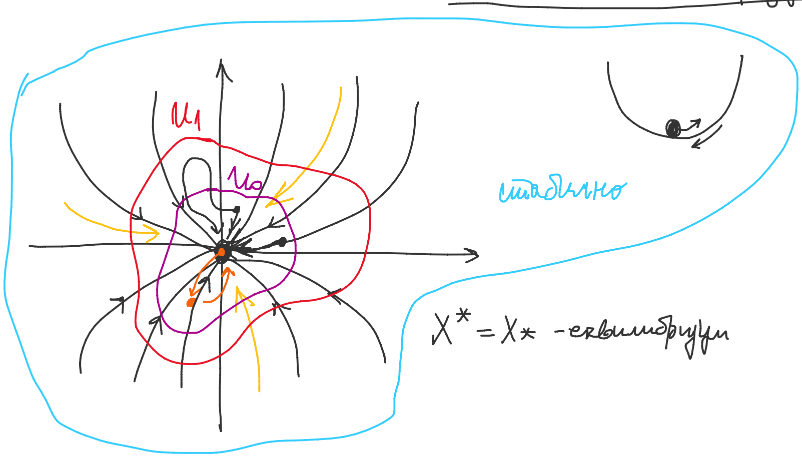
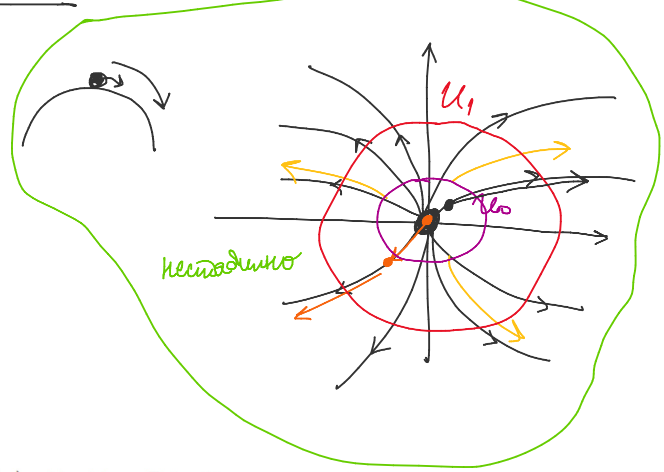
Стабилност еквилибријума ДС





Дефиниција 129. Нека је $\mathbf{x}_*$ еквилибријум система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$. Кажемо да је $\mathbf{x}_*$

- *стабилни еквилибријум* ако за сваку околину $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$ постоји околина $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_0 \ni \mathbf{x}_*$, таква да важи

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}_1, \quad t \geq 0,$$

  где је ϕ^t решење система

$$\frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{Id};$$

$X' = AX$

$\phi^t(x_0) = \phi_t(x_0) = e^{tA} \cdot x_0$

ток

- *асимптотски стабилни еквилибријум* ако је стабилни еквилибријум и ако још важи:

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \phi^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_*;$$

- *нестабилини еквилибријум* ако није стабилни.

по деф.

1. Скицирати фазне портрете динамичких система, а затим испитати стабилност њихових еквилибријума:

а) $x_1' = -x_1 + 2x_2$, $x_2' = -3x_2$

б) $x_1' = -x_1 + 3x_2$, $x_2' = 5x_1 - 3x_2$

в) $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$.

$X_* = (0,0)$ - једини у сва 3

$X' = AX \Rightarrow \phi^t(x_0) = \boxed{e^{tA}} \cdot x_0$

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\phi^t(x_0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot x_0$, $x_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$

$\mathcal{U}_0 = \mathbb{R}^2$

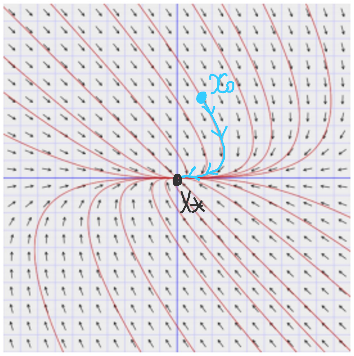
$$\lim_{t\to\infty} \phi^t(x_0) = \lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} a e^{-t} + b(e^{-t} - e^{-3t}) \\ b e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = X_*$$

$e^{-t} \to 0$

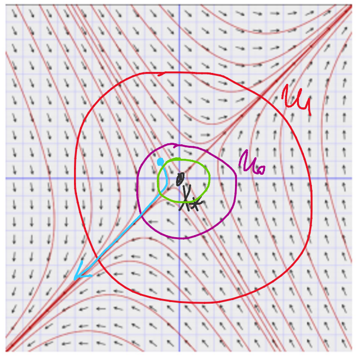
$e^{-3t} \to 0$

$\Rightarrow$ асимптотски стабилна

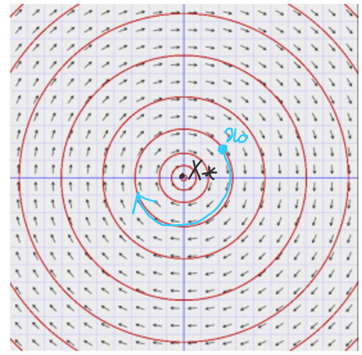
а)



б)



в)

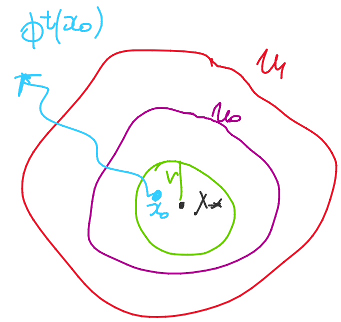


б) $\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = -6$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \phi^t(x_0) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5e^{2t} + 3e^{-6t} & 3e^{2t} - 3e^{-6t} \\ 5e^{2t} - 5e^{-6t} & 3e^{2t} + 5e^{-6t} \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$(\exists U_1)(\forall U_0)\ x_0 \in U_0 \wedge \phi^t(x_0) \notin U_1$ (за някое $t \geq 0$) $\Leftrightarrow$ нестабилна



U_1, U_0 – произволни

$U_0 \subseteq U_1$

$(\exists r > 0)\ B(X_*; r) \subseteq U_0$

$$x_0 = \begin{bmatrix} r/2 \\ 0 \end{bmatrix} \in B(X_*; r) \subseteq U_0$$

$$\phi^t(x_0) = \frac{1}{8}\Big[\ \_\ \_\ \Big] \cdot \begin{bmatrix} r/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{-6t} \to 0 \qquad e^{2t} \to \infty$$

$$\lim_{t\to\infty} \|\phi^t(x_0)\| = \lim_{t\to\infty} \left\| \frac{r}{16}\left(5e^{2t} + 3e^{-6t},\ 5e^{2t} - 5e^{-6t}\right)\right\| = \infty$$

$\Rightarrow (\exists t \geq 0)\ \phi^t(x_0) \notin U_1 \Rightarrow$ нестабилна

в) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\phi^t(x_0) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$\lambda_{1/2} = \pm i$

$\|\phi^t(x_0)\| = \|x_0\| \rightarrow$ проверете

U_1 – произв.

$U_0 = B(X_*; r) \subseteq U_1$

$x_0 \in U_0 \Rightarrow \phi^t(x_0) \in U_1$? ✓

$\phi^t(x_0) \in U_0 \subseteq U_1$

стабилна, али не асимптотски

$\mathcal{U}_0 = B(X_*; r) \subseteq \mathcal{U}_1$ $\qquad$ $x_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(x_0) \in \mathcal{U}_1$?✓

$\phi^t(x_0) \in \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}_1$

$\lim\limits_{t\to\infty} \phi^t(x_0) \neq X_*$

} стабилан, али не асимптотски

(T1) **Теорема 140.** *Нека је* $L := dF(\mathbf{x}_*)$ *линеарни оператор такав да је* $\boxed{\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0}$, *за сваку сопствену вредност* λ *и нека је* $\qquad x' = F(x)$

$$V(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2,$$

где је $\|\cdot\|$ *норма Љапунова придружена оператору* L *као у Напомени 139. Тада је* V *строга функција Љапунова из тачке (в) Теореме 132, па је* $\mathbf{x}_*$ *асимптотски стабилни еквилибријум система* $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$.

(T2) **Теорема 142.** *Ако је* $\mathbf{x}_*$ *стабилни еквилибријум, тада не постоји сопствена вредност матрице* $dF(\mathbf{x}_*)$ *чији је реални део строго позитиван.* $\quad$ } $(\exists\lambda)\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow X_*$ нестабилан

$F: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ $\qquad$ $x = (x_1, \dots, x_n)$

$F = (F_1, \dots, F_n)$

$$dF(x_*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_*) & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_*) \end{bmatrix} = L$$

2. Испитати стабилност еквилибријума из задатка 1 помоћу (теореме Љапунова) $^{\text{метод}}$ о сопственим вредностима.

$X' = AX$, $\underline{F(x) = A \cdot x}$ $\Rightarrow dF(x) = A \Rightarrow dF(x_*) = A\ (= L)$

↳ фја линеарна

а) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $\quad \mathrm{Re}(-1), \mathrm{Re}(-3) < 0 \overset{T1}{\Rightarrow}$ асимпт. ст.

б) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -6$, $\quad \mathrm{Re}(2) > 0 \overset{T2}{\Rightarrow}$ нестабилан

в) $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\quad \mathrm{Re}(i) = \mathrm{Re}(-i) = 0 \Rightarrow$ не знамо из T1 или T2

3. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$x_1' = e^{x_1} - e^{-3x_3} = 0 \Rightarrow e^{x_1} = e^{-3x_3} \overset{1-1}{\Rightarrow} x_1 = -3x_3$$
$$x_2' = 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow 4x_3 = 3\sin(x_1+x_2)$$
$$x_3' = \ln(1 - 3x_1 + x_3), = 0 \Rightarrow 1-3x_1+x_3 = 1 \Rightarrow 3x_1 = x_3$$

$x_1 = -3(3x_1) = -9x_1$

$\Rightarrow x_1 = x_3 = 0$

$3\sin(x_2) = 0 \Rightarrow \sin x_2 = 0$

$x_2 \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

а затим испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0, 0, 0)$.

$$X_* = \{(0, k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$X_* = (0,0,0)$: $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ $(\mathcal{U} = \{1 - 3x_1 + x_3 > 0\})$, $F = (F_1, F_2, F_3)$

$F_1(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} - e^{-3x_3}$

$F_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_3 - 3\sin(x_1+x_2)$

$F_3(x_1, x_2, x_3) = \ln(1 - 3x_1 + x_3)$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$$dF(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & 3e^{-3x_3} \\ -3\cos(x_1+x_2) & -3\cos(x_1+x_2) & 4 \\ \frac{-3}{1-3x_1+x_3} & 0 & \frac{1}{1-3x_1+x_3} \end{bmatrix}$$

$$L = dF(\underset{\substack{\parallel \\ (0,0,0)}}{x_*}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_{2/3} = 1 \pm 3i \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} Re(\lambda_1) = -3 \\ Re(\lambda_{2/3}) = 1 > 0 \end{array}\right\} \overset{T2}{\Longrightarrow} X_* = (0,0,0) \text{ је нестабилан}$$

У формулацији Теореме Љапунова[1] користићемо традиционалну ознаку $V'(\mathbf{x})$ за извод функције V дуж решења система:

$$V'(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}(V(\phi^t)(\mathbf{x})), \quad \text{за} \quad \frac{d}{dt}\phi^t(\mathbf{x}) = F(\phi^t(\mathbf{x})),\ \phi^0 = \mathrm{Id}.$$

Одавде је

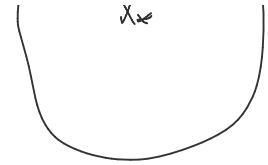
$$V'(\mathbf{x}) = dV(\phi^t(\mathbf{x}))(F(\phi^t(\mathbf{x})) = \boxed{\langle \nabla V(\phi^t(\mathbf{x})), F(\phi^t(\mathbf{x}))\rangle.}$$

Теорема 132. (Теорема Љапунова.) *Нека је* $\mathbf{x}_*$ *еквилибријум система* $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ *и нека је функција* $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *дефинисана на некој околини* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ *тачке* $\mathbf{x}_*$, *таква да је*

- V *класе* C^1 *на* $\mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$
- $V(\mathbf{x}) > 0$ *за* $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$, $V(\mathbf{x}_*) = 0$.

је

- V *класе* C^1 *на* $\mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$
- $V(\mathbf{x}) > 0$ *за* $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$, $V(\mathbf{x}_*) = 0$.



Тада ако је

(а) $\boxed{V'(\mathbf{x}) \le 0}$, *за* $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ *(одакле следи да* V *опада дуж решења система), тада постоји околина тачке* $\mathbf{x}_*$ *таква да је свако решење које почиње у тој околини дефинисано за свако* $t \ge 0$*; осим тога,* $\boxed{\mathbf{x}_* \text{ је стабилни еквилибријум;}}$

(б) $\boxed{V'(\mathbf{x}) < 0}$, *за* $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ *(одакле следи да* V *строго опада дуж решења система), тада постоји околина тачке* $\mathbf{x}_*$ *таква да је свако решење које почиње у тој околини дефинисано за свако* $t \ge 0$*; осим тога,* $\boxed{\mathbf{x}_* \text{ је асимптотски стабилни еквилибријум;}}$

(в) $\boxed{V'(\mathbf{x}) > 0}$, *за* $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ *(одакле следи да* V *строго расте дуж решења система), тада је* $\boxed{\mathbf{x}_* \text{ нестабилни еквилибријум.}}$

Функција V *се зове функција Љапунова.*

4. **Одредити све еквилибријуме динамичког система**

$$x_1' = (x_3+1)(2x_2 - x_1)$$
$$x_2' = -(x_3+1)(x_1+x_2)$$
$$x_3' = -x_3^3,$$

а затим испитати њихову стабилност.

*урађено на предавању → погледати

$(V(x_1,x_2,x_3) = a x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 \ , \ a,b,c>0)$

$X_* = (0,0,0)$

$$dF(x) = \begin{bmatrix} -x_3-1 & 2x_3+2 & 2x_2-x_1 \\ -x_3-1 & -x_3-1 & -x_1-x_2 \\ 0 & 0 & -3x_3^2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow L = dF(x_*) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = 0$$

$Re(\lambda_1)=0$

$\lambda_{2/3} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$

метода сопс. вр. не даје одг.

5. Доказати да је координатни почетак стабилан, али не и асимптотски стабилан еквилибријум система $X' = AX$, где је $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0,0)$ система:

а) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_1x_2^2 \\ -x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ б) $X' = AX + \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 \\ x_2^3 + x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ в) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$

Показати да је у сва три случаја матрица $\mathrm{d}F(\mathbf{0})$ једнака и да метод сопствених вредности не даје одговор.

доказати! (1в)

нпр. а) $X' = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2 \\ x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix}$

$$dF(x) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - x_2^2 & -1-2x_1x_2 \\ 1-2x_1x_2 & -3x_2^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow dF(x_*) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$\lambda_{1/2} = \pm i$

(исто б, в)

а) $x' = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2 \\ x_1 - x_2^3 - x_1^2 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$

$V(x_1,x_2) = a x_1^2 + b x_2^2 \quad , a,b>0 \qquad \nabla V(x_1,x_2) = (2a x_1, 2b x_2)$

$\langle \nabla V(x_1,x_2), F(x_1,x_2) \rangle = \langle (2a x_1, 2b x_2), (-x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2, x_1 - x_2^3 - x_1^2 x_2) \rangle =$

$= 2a x_1 (-x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2) + 2b x_2 (x_1 - x_2^3 - x_1^2 x_2) =$

$= -2a x_1 x_2 - 2a x_1^4 - 2a x_1^2 x_2^2 + 2b x_1 x_2 - 2b x_2^4 - 2b x_1^2 x_2^2 =$

$= 2x_1 x_2 (b-a) \underbrace{-2x_1^2 x_2^2 (a+b)}_{<0} \underbrace{-2a x_1^4 - 2b x_2^4}_{<0}$

$a,b = ?$

$V' \leq 0, V' < 0, V' > 0 ?$

$a = b (=1): \qquad V'(x_1,x_2) = -2x_1^2 x_2^2 \cdot 2 - 2x_1^4 - 2x_2^4 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0, \ (x_1,x_2) \neq (0,0)$

$V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 \qquad (\mathcal{V} = \mathbb{R}^2)$

- V је C^1 на $\mathcal{V} \setminus \{(0,0)\}$ ✓
- $V > 0$ на $\mathcal{V} \setminus \{(0,0)\}$, $V(0,0) = 0$ ✓
- $V' < 0$ на $\mathcal{V} \setminus \{(0,0)\}$ ✓

$\Rightarrow X_*$ асимптотски стабилан еквилибријум

б) $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$V' = \langle \nabla V, F \rangle = \langle (2x_1, 2x_2), (-x_2 + x_1^3 + x_1 x_2^2, x_1 + x_2^3 + x_1^2 x_2) \rangle = 2x_1^4 + 2x_2^4 + 4x_1^2 x_2^2 = 2(x_1^2 + x_2^2) > 0$

на $\mathcal{V} \setminus \{x_*\}$

$(\mathcal{V} = \mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow$ нест.

в) $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$V' = \ldots = 0 \leq 0 \Rightarrow$ стабилни еквил.

6. Испитати стабилност положаја равнотеже $X^* = (0,0)$ динамичког система

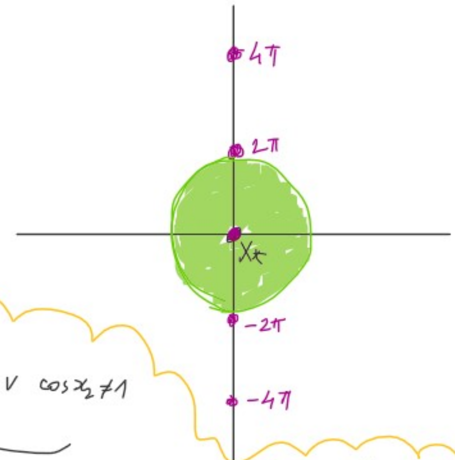
$$x_1' = -\sin x_2$$
$$x_2' = x_1.$$

додатно: метод сопс. вр. не даје одговор

$V = ? \rightsquigarrow \nabla V = (x_1, \sin x_2)\ ? \longrightarrow \langle \nabla V, F \rangle = x_1(-\sin x_2) + \sin x_2 (x_1) = 0 \leq 0$

$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} - \cos x_2 + C \rightarrow ?\ V(0,0) = 0 \Rightarrow C = 1$

$$\left[\frac{0^2}{2} - \cos 0 + C = 0 \quad C = 1\right]$$



$V(x_1 x_2) = \underbrace{\frac{x_1^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{1 - \cos x_2}_{\geq 0}$:

- V је C^1 ✓
- $V(0,0) = 0$ ✓

$V(x) > 0$ за $\underbrace{x_1 \neq 0 \vee \cos x_2 \neq 1}$

важи строго на $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < (2\pi)^2\} \setminus \{(0,0)\}$

$\mathcal{U} \neq \mathbb{R}^2$

$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < (2\pi)^2\}$

$\cos x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 2k\pi$

$V(x) > 0$, за $x \in \mathcal{U} \setminus \{x_*\}$ ✓

- $V'(x) = \langle \nabla V(x), F(x) \rangle = 0 \leq 0$ ✓

$\Rightarrow X_*$ је стабилан еквилибријум