ЛДЈВРКК

$$F(t,x,x',\dots,x^{(n)})=0$$

- ДЈ је линеарна ако је F линеарно ⇝ $a_0(t)x+a_1(t)x'+\dots+a_n(t)x^{(n)}=f(t)$
- $f\equiv 0$ ⇝ хомогена
- $a_0(t),\dots,a_n(t)$ константне ⇝ КК
- $x_H(t)$ – решење хомогене (ОР)
  $x_p(t)$ – партикуларно нехомогене } ОР: $x(t)=x_H(t)+x_p(t)$
- У случају ЛДЈВРКК: $a_nx^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\dots+a_1x'+a_0x=0$ (хомогена)

$$a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0=0$$ → карактеристична једначина

↳ има n решења (у C)

→ реалну нулу p вишеструкости m: $e^{pt}, t\cdot e^{pt},\dots,t^{m-1}e^{pt}$ (m решења)

→ комплексну нулу $a\pm ib$ вишеструкости m: $e^{at}\cos bt,\ e^{at}\sin bt,\ te^{at}\cos bt,\ te^{at}\sin bt,\ \dots,\ t^{m-1}e^{at}\cos bt,\ t^{m-1}e^{at}\sin bt$. (2m решења)

→ укупно n решења (са вишеструкостима)

Т: ОР хомогене је $x(t)=C_1x_1(t)+\dots+C_nx_n(t)$, $C_i\in\mathbb{R}$

1) а) $x'''-13x'-12x=0 \longrightarrow \lambda^3-13\lambda-12=0 \longrightarrow (\lambda+1)(\underbrace{\dots}_{\lambda^2-\lambda-12})=0 \longrightarrow$

$\lambda=1$ ×
$\lambda=-1$ ✓

$\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 12}}{2}$

$\lambda_1=-1 \longrightarrow e^{-t}$
$\lambda_2=4 \longrightarrow e^{4t}$
$\lambda_3=-3 \longrightarrow e^{-3t}$

ОР: $x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{4t}+C_3e^{-3t}$, $C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$

б) $x'''-7x''+16x'-12x=0$

$\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12=0$

$\lambda=1$ ×
$\lambda=-1$ ×
$\lambda=2$ ✓

$(\lambda-2)(\underbrace{\lambda^2-5\lambda+6}_{(\lambda-3)(\lambda-2)})=0 \longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=2 \longrightarrow e^{2t}, te^{2t}$

$\lambda_3=3 \longrightarrow e^{3t}$

ОР: $x(t)=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}+C_3e^{3t}$, $C_i\in\mathbb{R}$

в) $x'''-3x''+9x'+13x=0$

$\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda+13=0$

$(\lambda+1)(\underbrace{\lambda^2-4\lambda+13}_{})=0$

$D=16-4\cdot 13=16-52=-36$

$\lambda_1=-1 \longrightarrow e^{-t}$

$\lambda_{2/3}=\frac{4\pm i\cdot 6}{2}=2\pm 3i$

↓

$\lambda=1$ ×

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$

$\lambda = 1$ ✗

$\lambda = -1$ ✓

$D = 16 - 4\cdot 13 = 16 - 52 = -36$

$\lambda_{2/3} = \frac{4 \pm i \cdot 6}{2} = 2 \pm 3i$

$\downarrow$

$e^{2t}\cos 3t \,,\; e^{2t}\sin 3t$

ОР: $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}\cos 3t + c_3 e^{2t}\sin 3t \quad , c_i \in \mathbb{R}$

г) $x^{(6)} - 4x^{(5)} + 8x^{(4)} - 8x''' + 4x'' = 0$

$\lambda^6 - 4\lambda^5 + 8\lambda^4 - 8\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4) = 0$

$\lambda = 1$ ✗

$\lambda = -1$ ✗

$\vdots$

$(\lambda^2 + a\lambda + b)(\lambda^2 + c\lambda + d)$

$\rightarrow a + c = -4$

$b + d + ac = 8$

$\rightarrow ad + bc = -8$

$bd = 4$

Пробамо: $b = d = 2$

$\left.\begin{array}{l} a + c = -4 \checkmark \\ ac = 4 \end{array}\right\} a = c = -2 \checkmark$

$(\lambda^2 - 2\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$

$D = 4 - 4\cdot 2 = -4$

$\frac{2 \pm i \cdot 2}{2} = 1 \pm i$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \rightarrow e^{0\cdot t}, te^{0t} \rightsquigarrow \underline{1}, \underline{t}$

$\lambda_{3/4} = \lambda_{5/6} = 1 \pm i$

ОР: $x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t\cos t + c_4 e^t \sin t + c_5 t e^t \cos t + c_6 t e^t \sin t \;, \quad c_i \in \mathbb{R}$

② Решити Кошијев проблем $x''' + x'' = 0$ (3. реда) $, \; x(0) = 1 \,, \; x'(0) = 0 \,, \; x''(0) = 1.$

$\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 1) = 0$

ОР: $x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} \quad , c_i \in \mathbb{R}$

$x(0) = \underbrace{c_1 + c_3 = 1}$

$x'(t) = c_2 - c_3 e^{-t}$

$x'(0) = \underbrace{c_2 - c_3 = 0}$

$x''(t) = c_3 e^{-t}$

$x''(0) = \underbrace{c_3 = 1}$

$c_1 = 0$

$c_2 = c_3 = 1$

$\underbrace{x_k(t) = t + e^{-t}}$

Нехомогена: $f \neq 0$

у неким случајевима знамо $f(t)=e^{\alpha t}\cdot\left(P_n(t)\cdot\cos\beta t+Q_m(t)\cdot\sin\beta t\right)$ P_n – пол. степена n, Q_m – пол. степена m

s – вишеструкост броја $\alpha\pm i\beta$ као решења карактеристичне једначине

$x_p(t)=t^s\cdot e^{\alpha t}\cdot\left(R_k(t)\cdot\cos\beta t+T_k(t)\cdot\sin\beta t\right)$ R_k, T_k – пол. степена k, $k=\max\{n,m\}$

③ а) $x'''-x''+x'-x=t^2+t$

$(1,\pm i)$

ОР: $x(t)=x_H(t)+x_p(t)=c_1e^t+c_2\cos t+c_3\sin t+x_p(t)$, $c_i\in\mathbb{R}$

$f(t)=t^2+t$

$\alpha=0$

$\beta=0$ $(\sin\beta t=0,\ \cos\beta t=1)$

$P_n(t)=t^2+t \Rightarrow n=2$
$(m=0)$ $\Big\}$ $k=\max\{n,m\}=2$

$s=?$ $\alpha\pm i\beta=0\pm i\cdot 0=0 \Rightarrow s=0$

$x_p(t)=R_2(t)=at^2+bt+c \longrightarrow x_p'(t)=2at+b$

$x_p''(t)=2a$

$x_p'''(t)=0$

$x_p'''-x_p''+x_p'-x_p=t^2+t$

$0-2a+2at+b-at^2-bt-c=t^2+t$

$t^2:\ -a=1$
$t:\ 2a-b=1$
$1:\ -2a+b-c=0$

$a=-1$
$b=-3$
$c=-1$

$x_p(t)=-t^2-3t-1$

ОР: ....

б) $x'''-x''+x'-x=\underline{\cos t+2e^t}$ → није у одг. облику!

$(1,\pm i)$

$x_H(t)=\ldots$

$L(x)=\underbrace{f_1(t)}+\underbrace{f_2(t)}$ (лин. диф)

$f_1 \rightsquigarrow x_{p_1}$

$f_2 \rightsquigarrow x_{p_2}$

ОР: $x(t)=x_H(t)+\underbrace{x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t)}_{x_p(t)}$

$f_1(t)=\cos t$

$f_2(t)=2e^t$

f_1: $\alpha=0,\ \beta=1$

P_n – конст. $\Rightarrow n=0$
$(Q_m\equiv 0 \Rightarrow m=-\infty)$ $\Big\}$ $k=0$

$R_k(t)=c_1$

$T_k(t)=c_2 \Rightarrow x_{p_1}(t)=t\cdot(c_1\cos t+c_2\sin t)$ ---- $(c_1,c_2=?)$

$c_1=c_2=-\frac{1}{4}$

$s=?$ $0\pm i\cdot 1=\pm i \Rightarrow s=1$

f_2: $\left.\begin{array}{l}\alpha=1\\ \beta=0\end{array}\right\}$ $1\pm i\cdot 0=1 \Rightarrow s=1$

$\left.\begin{array}{l}n=0\\ (m=0)\end{array}\right\}$ $k=0$ $\qquad R_k(t)=c_1$

$$x_{p2}(t)=t\cdot e^t\cdot c_1 \quad --- \quad (c_1=?)$$

$x_{p2}'=c_1 e^t(1+t)$

$x_{p2}''=c_1 e^t(2+t)$

$x_{p3}'''=c_1\cdot e^t(3+t)$

$$x_{p2}'''-x_{p2}''+x_{p2}'-x_{p2}=2e^t$$

$$c_1 e^t\left[(3+t)-(2+t)+(1+t)-t\right]=2e^t$$

$$c_1\cdot(2)=2 \Rightarrow c_1=1 \Rightarrow x_{p2}(t)=t\cdot e^t$$

$$\text{OP: } x(t)=\underbrace{c_1e^t+c_2\cos t+c_3\sin t}_{x_H(t)}\underbrace{-\frac{t}{4}(\cos t+\sin t)}_{x_{p1}(t)}+\underbrace{t\cdot e^t}_{x_{p2}(t)}$$

в) $x''-x=\sin^2 t$

(± 1)

$$\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)=\underbrace{\frac{1}{2}}_{=f_1}\underbrace{-\frac{\cos 2t}{2}}_{=f_2}$$

f_1: $x_{p1}=C \Rightarrow C=-\frac{1}{2}$

$(\alpha=\beta=s=n=m=k=0)$

f_2: $\alpha=0$

$\beta=2$ $\qquad x_{p2}(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$

$n=m=k=0$

$s=0$

г) $x''-4x'+5x=\underbrace{(\sin t+2\cos t)\cdot e^{2t}}$

$(2\pm i)$

$\left.\begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta=1\end{array}\right\}$ $2\pm i \Rightarrow s=1$ $\qquad \Big\}\ x_p(t)=t\cdot e^{2t}\cdot(c_1\cos t+c_2\sin t)$ ...

$n=m=k=0$

д) $x''-2x'+x=\dfrac{e^t}{t}$ → није оно што смо прешли!

$\lambda^2-2\lambda+1=0$

$(\lambda-1)^2=0$

$x_p(t)=e^t\cdot g(t)$ $\qquad (g=?)$

$x_p'(t)=e^t\cdot(g(t)+g'(t))$

$$x_p''(t) = e^t \cdot (g(t) + 2g'(t) + g''(t))$$

$$\cancel{e^t}\cdot(g+2g'+g'') - 2\,\cancel{e^t}(g+g') + \cancel{e^t}\cdot g = \frac{\cancel{e^t}}{t}$$

$$\cancel{g} + \cancel{2g'} + g'' - \cancel{2g} - \cancel{2g'} + \cancel{g} = \frac{1}{t}$$

$$g'' = \frac{1}{t} \Rightarrow g(t) = \int(\ln|t| + c_1)\,dt = \underline{c_1 t} + c_2 + t\ln|t| \underline{- t}$$

jedno: $\left.\begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{matrix}\right\} \; g(t) = t\cdot\ln|t|$

OP: $x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + t\cdot\ln|t|\cdot e^t, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$