Организација: ПИ - 50п — 2h — 3 зад → 1 зад проф.
УИ - 50п
} учити заједно!

Шта је то диференцијална једначина (ДЈ)? $f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$

пр. $t^2 + x''' \cdot t + x \cdot x' = 0$ → 3. реда

$\Downarrow$

$x(t) = \dots$

ред ДЈ = ред највећег извода у једначини

$x'(t) = \dots$

$x^{(17)} - 3x'' + x = t^3$ → 17. реда

ДЈ → изрази као $\underline{\text{једначина}}$ (+ системи) 1. реда $x'(t) = f(t, x)$

$$x'(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = x' = \dot{x}$$

$$\frac{\bullet\, x(t)}{\bullet\, y(x)}$$

① Решити ДЈ: $x' = t^2 + t \quad / \int$

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

наћи сва решења } обично: ∞ решења

② $\int_0^x f(u)\,du = f(x) \quad /'$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна

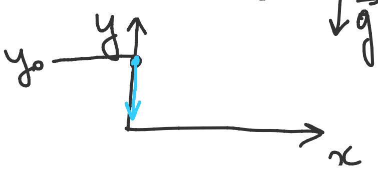
$f(x) = f'(x) \rightsquigarrow f(x) = c \cdot e^x$, $c \in \mathbb{R}$

видећемо мало касније

- ОПШТЕ РЕШЕЊЕ (ОР): облик који описује сва решења ДЈ — $f(x) = c \cdot e^x$, $c \in \mathbb{R}$
- ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ (ПР): једно конкретно решење ДЈ — $f(x) = 2e^x$.

ДЈ → физика

③ Слободан пад:



$\downarrow \vec{g}$

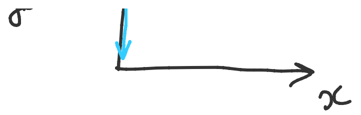
$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned}\right\}$$

почетни услови

$x(t)$ → положај

$v(t) = \dot{x}(t)$ → брзина

$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$ → убрзање



$$\overline{\qquad\qquad}$$

почетни услови

$$\boxed{\begin{matrix} x(0)=0 & x'(0)=0 \\ y(0)=y_0 & y'(0)=0 \end{matrix}}$$

$a(t) = \dot v(t) = \ddot x(t)$ → убрзање

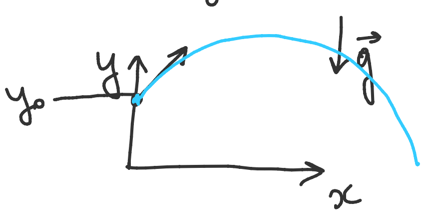
$$x(t) = c_1 t + c_2 \qquad c_i \in \mathbb{R}$$

$$\dot y(t) = -gt + c_3 \to y(t) = -\frac{gt^2}{2} + c_3 t + c_4$$

$$\left.\begin{matrix} x(0)=0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ \dot x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{matrix}\right\} x(t) = 0$$

$$\left.\begin{matrix} y(0)=y_0 \Rightarrow c_4 = y_0 \\ \dot y(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \end{matrix}\right\} y(t) = -\frac{gt^2}{2} + y_0$$

④ Коси хитац:



$$\left.\begin{matrix} \ddot x = 0 \\ \ddot y = -g \end{matrix}\right\}$$

почетни услови

$$\boxed{\begin{matrix} x(0)=0 & x'(0)=v_x \\ y(0)=y_0 & y'(0)=v_y \end{matrix}}$$

$$x(t) = c_1 t + c_2$$

$$\dot y(t) = -gt + c_3 \to y(t) = -\frac{gt^2}{2} + c_3 t + c_4 \qquad c_i \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{matrix} x(0)=0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ \dot x(0) = v_x \Rightarrow c_1 = v_x \end{matrix}\right\} x(t) = v_x t$$

$$\left.\begin{matrix} y(0)=y_0 \Rightarrow c_4 = y_0 \\ \dot y(0) = v_y \Rightarrow c_3 = v_y \end{matrix}\right\} y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_y t + y_0$$

$$t = \frac{x}{v_x}$$

$$y = -\frac{g}{2v_x^2}\boxed{x^2} + \frac{v_y}{v_x}\boxed{x} + y_0$$

⑤ $x' = kx$, $k \in \mathbb{R}$

$$\frac{dx}{dt} = kx \qquad , x \neq 0$$

$$\frac{dx}{x} = k\,dt \quad / \int$$

$$e^{\cdot} \big| \quad \ln|x| = k \cdot t + c \qquad , c \in \mathbb{R}$$

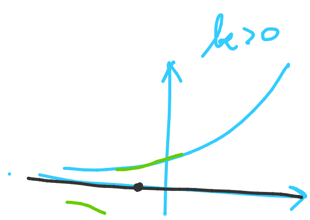
$$|x| = e^{kt+c} = \underbrace{e^c}_{c_1} \cdot e^{kt} = \boxed{c_1 \cdot e^{kt}} \quad , c_1 > 0$$

$k < 0$ → радиоактивни распад

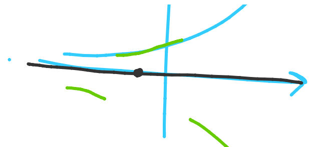
$k = 0$ → $x' = 0$ → $x = c \in \mathbb{R}$

$k > 0$ → експоненцијални раст

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{x}$$



$x = c_2 \cdot e^{kt}$, $\underline{c_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}$ $(c_2 = \pm c_1)$



$x = ?$ → x диф ⇒ x неп.

Пикарова Т (касније) } решења се не секу

$x(t) = 0$ → решење

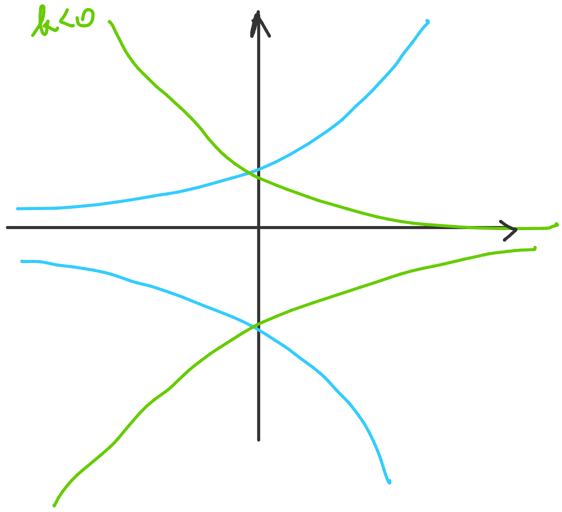
ОР: $x = c_3 \cdot e^{kt}$, $c_3 \in \mathbb{R}$

$k>0$

$k<0$

$c_3>0$

$c_3<0$



Раздвајање променљивих: $x'(t) = \dfrac{f(t)}{g(x)}$, $f \in C(a,b)$, $g \in C(c,d)$, $g \neq 0$

ОР: $\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(u)\,du = \int_{t_0}^{t} f(v)\,dv$ $\left(\displaystyle\int g(x)\,dx = \int f(t)\,dt\right)$

$x' = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{f(t)}{g(x)}$

$g(x)\,dx = f(t)\,dt \;/\int$

• Кошијев проблем: $x' = f(x,t)$

$x(t_0) = x_0$ ← Кошијев услов

n-тог реда: $x(t_0) = x_0$

$x'(t_0) = x_1$

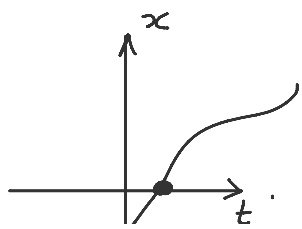
$\vdots$

$x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$

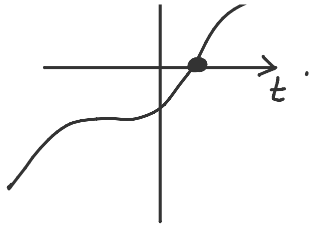
пр. задаци 3 и 4

(6) $tx' = x$, ОР и ПР тд. $x(-3) = \frac{1}{3}$.

$t \cdot \dfrac{dx}{dt} = x \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dt}{t} \;/\int$



$$t\cdot\frac{dx}{dt}=x \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{x}=\frac{dt}{t}\quad /\int$$



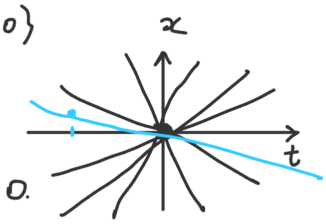
$$\ln|x|=\ln|t|+c\,,\quad c\in\mathbb{R}$$

$$|x|=|t|\cdot\underbrace{e^{c}}_{c_1}\,,\quad c_1>0$$

$$x=c_2t\,,\quad c_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$x=0\to$ решење $\longrightarrow$ $\boxed{x=c_3t\,,\ c_3\in\mathbb{R}}$ ОР

$t=0$: у почетку: $0\cdot x'(0)=x(0)\Rightarrow x(0)=0.$



ПР: $x(-3)=\frac{1}{3}$

$$c_3\cdot(-3)=\frac{1}{3}\Rightarrow c_3=-\frac{1}{9}\Rightarrow \boxed{x(t)=-\frac{t}{9}}$$

7. $x'=\dfrac{2xt}{t^2-1}$. Решити ДЈ, скицирати решења
↳ интегралне криве

$|t|\neq 1$

Наћи ПР: а) $x(0)=1$

б) $x(2)=1$

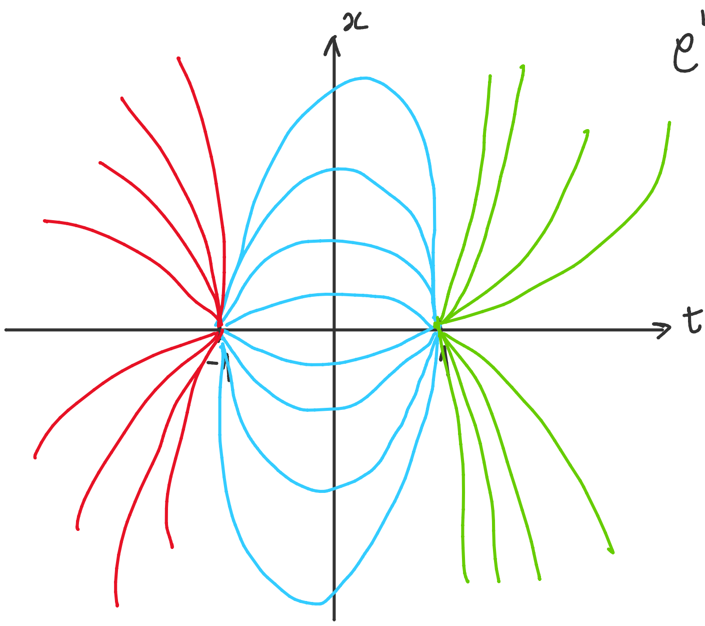
$$\frac{dx}{dt}=x\cdot\frac{2t}{t^2-1}\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{2t\,dt}{t^2-1}\quad/\int$$

$$\ln|x|=\ln|t^2-1|+c\,,\quad c\in\mathbb{R}$$

$$e^{\sqcup}=e^{\sqcup}$$

$$|x|=|t^2-1|\cdot c_1\,,\quad c_1>0$$

$$\boxed{x=c_2\cdot(t^2-1)}\ \text{ОР},\quad c_2\in\mathbb{R}$$



1° $t\in(-1,1)$

2° $t\in(1,+\infty)$

3° $t\in(-\infty,-1)$

а) $x(0)=1$, $0\in(-1,1)$?. $\boxed{x(t)=1-t^2,\ t\in(-1,1)}$

а) $x(0)=1$, $\underline{0\in(-1,1)}$

$$\left.1=c_2(0^2-1)=-c_2 \Rightarrow c_2=-1\right\} \quad \boxed{x(t)=1-t^2,\ \underline{t\in(-1,1)}}$$

б) $x(2)=1$, $\underline{2\in(1,+\infty)}$

$$\left.1=c_2(2^2-1)=3c_2 \Rightarrow c_2=\frac{1}{3}\right\} \quad \boxed{x(t)=\frac{t^2-1}{3},\ \underline{t\in(1,+\infty)}}$$

За домаћи: $x'=kx^2,\ k>0$

→ једначина експлозије } решити, показати да решење није деф. на $\mathbb{R}$ и да не може да се продужи

(8) Наћи све C^1 функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ тд. $f(0)=1$ и:

<u>површина испод графика</u> од 0 до x_0 од f

=

<u>дужина лука</u> од 0 до x_0 од f } $\forall x_0>0$.

$$\underbrace{\int_0^{x_0} f(u)\,du}_{} = \underbrace{\int_0^{x_0}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du}_{} \quad /\,'_{x_0}$$

$$f(x_0)=\sqrt{1+f'(x_0)^2} \quad /^2 \longrightarrow f>0 \longrightarrow \boxed{f\geq 1}$$

$$f(x_0)^2-1=f'(x_0)^2$$

$$f'(x_0)=\sqrt{f(x_0)^2-1} \qquad f'=\frac{df}{dx_0}$$

$$\frac{df}{\sqrt{f^2-1}}=dx_0 \,/\int \longrightarrow f=1\,?$$

↙ ?

⋮