1 - петак 16.10.2020.

организација: ПИ - 5оп - 2h - 3 зад → 1 зад проф.

УИ - 5оп

} учимо заједно!

Шта је ДЈ? $f(t,x,x',\dots,x^{(n)})=0$

$x(t)=?$

пр. $t\cdot x''+x^{(4)}-t^2=0$ → 4. реда

↳ $x(t)=\_\_$

ред ДЈ = ред највећег извода у једначини

$x^{(8)}=t^2\cdot x+x'''-x^{(7)}$ → 8. реда

1. реда: $x'(t)=f(t,x)$ (+системе)

Свака ДЈ $\xrightarrow{\text{може се}}$ изразити

$AX=B$, $\mathbb{R}^n$

$\underline{x(t)}$, $y(x)$, $f(x)$

$x'(t)=x'=\dot{x}=\frac{dx}{dt}$

1. Решити ДЈ: $x'=\sin t+2$ $/\int$

наћи сва решења ДЈ

↳ обично ∞ много

$x(t)=-\cos t+2t+c$, $c\in\mathbb{R}$

2. $\int_0^x f(t)\,dt=f(x)$ $/'$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диф.

$f(x)=f'(x)$ $\rightsquigarrow$ $f(x)=c\cdot e^x$, $c\in\mathbb{R}$

видећемо мало касније

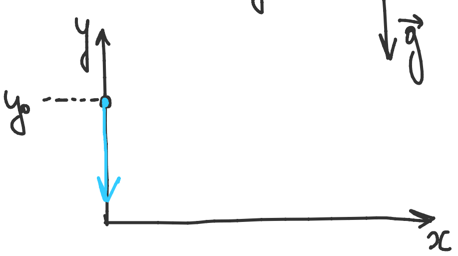
• ОПШТЕ РЕШЕЊЕ (ОР): облик који описује сва решења ДЈ

• ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ (ПР): конкретно решење ДЈ

ОР: $f(x)=c\cdot e^x$, $c\in\mathbb{R}$

ПР: $f(x)=4e^x$

3. Слободан пад:



$\downarrow\vec{g}$

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=0\\ \ddot{y}&=-g\end{aligned}\right\}\quad g>0$$

почетни услови:

$$\boxed{\begin{matrix} x(0)=0 & \dot{x}(0)=0\\ y(0)=y_0 & \dot{y}(0)=0\end{matrix}}$$

t - време

$x(t)$ - положај честице

$v(t)=\dot{x}(t)$ - брзина

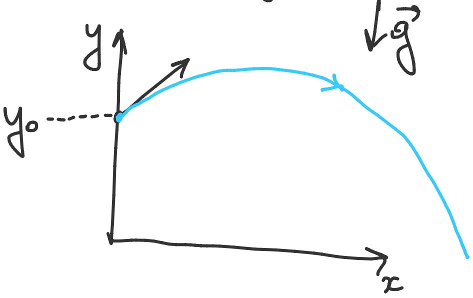
$a(t)=\dot{v}(t)=\ddot{x}(t)$ - убрзање

$$x(0)=0 \qquad \dot{x}(0)=0$$
$$y(0)=y_0 \qquad \dot{y}(0)=0$$

$$\dot{x}(t)=c_1 \Rightarrow x(t)=c_1t+c_2, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$
$$\dot{y}(t)=-gt+c_1 \Rightarrow y(t)=-\frac{gt^2}{2}+c_1t+c_2, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0)=0 \Rightarrow c_2=0 \\ \dot{x}(0)=0 \Rightarrow c_1=0 \end{array}\right\} x(t)\equiv 0$$
$$\left.\begin{array}{l} y(0)=y_0 \Rightarrow c_2=y_0 \\ \dot{y}(0)=0 \Rightarrow c_1=0 \end{array}\right\} y(t)=-\frac{gt^2}{2}+y_0$$

(4) Коси хитац:



$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}=0 \\ \ddot{y}=-g \end{array}\right\} g>0$$

почетни услови:

$$x(0)=0 \qquad \dot{x}(0)=v_x$$
$$y(0)=y_0 \qquad \dot{y}(0)=v_y$$

$$\dot{x}(t)=c_1 \Rightarrow x(t)=c_1t+c_2, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$
$$\dot{y}(t)=-gt+c_1 \Rightarrow y(t)=-\frac{gt^2}{2}+c_1t+c_2, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0)=0 \Rightarrow c_2=0 \\ \dot{x}(0)=v_x \Rightarrow c_1=v_x \end{array}\right\} \Rightarrow x(t)=v_xt$$
$$\left.\begin{array}{l} y(0)=y_0 \Rightarrow c_2=y_0 \\ \dot{y}(0)=v_y \Rightarrow c_1=v_y \end{array}\right\} \Rightarrow y(t)=-\frac{gt^2}{2}+v_yt+y_0$$

$$t=\frac{x}{v_x}$$

$$\boxed{y}=-\frac{g}{2v_x^2}\cdot\boxed{x^2}+\frac{v_y}{v_x}\cdot\boxed{x}+y_0$$

(5) $x'=kx, \quad k\in\mathbb{R}$

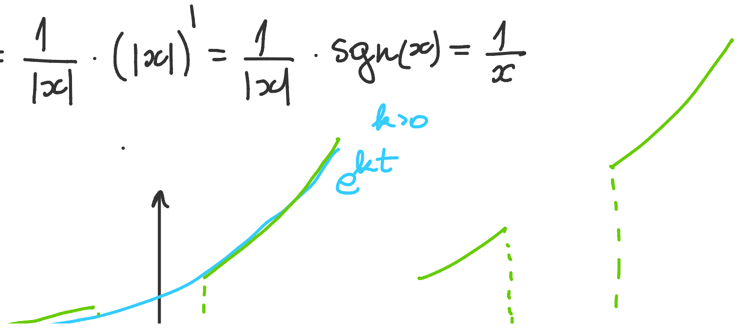
$$\frac{dx}{dt}=kx, \quad x\neq 0$$
$$\frac{dx}{x}=k\,dt \;/\int$$
$$\int\frac{dx}{x}=\int k\,dt$$
$$e^{\llcorner}\quad \ln|x|=kt+c, \quad c\in\mathbb{R}$$
$$|x|=e^{kt}\cdot\underbrace{e^{c}}, \quad c_1>0$$

$k<0$: радиоактивни распад

$k=0$: $x'=0 \Rightarrow x\equiv c\in\mathbb{R}$

$k>0$: експоненцијални раст

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|}\cdot(|x|)'=\frac{1}{|x|}\cdot\mathrm{sgn}(x)=\frac{1}{x}$$

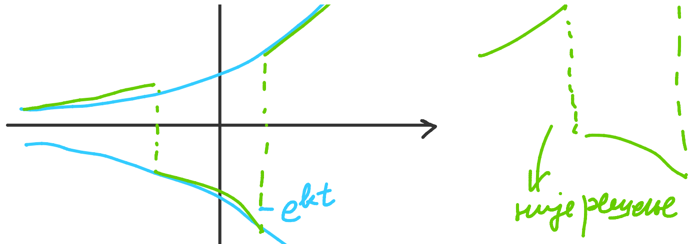


$e^{\ln}$

$$|x| = e^{kt}\cdot \underbrace{e^{c}}_{c_1}, \quad c_1 > 0$$

$$|x| = c_1 e^{kt} \qquad c_2 = \pm c_1$$

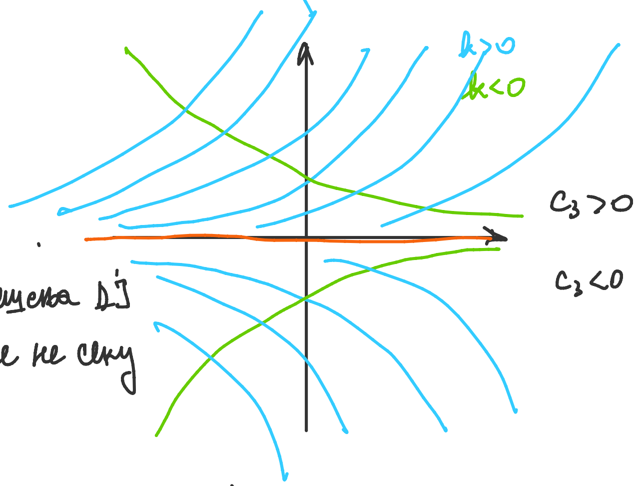
$$x = c_2 \cdot e^{kt}, \quad c_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$



$x' \Rightarrow x$ диф $\Rightarrow x$ неп.

$x \equiv 0: \; 0' = k\cdot 0$ ✓ $(c_2 = 0)$

ОР: $\boxed{x(t) = c_3 \cdot e^{kt}, \; c_3 \in \mathbb{R}}$



Пикарова Т (касније) } решења ДЈ се не секу

Раздвајање променљивих:

$$x'(t) = \frac{f(t)}{g(x)}, \quad f \in C(a,b), \; g \in C(c,d), \; g \neq 0$$

ОР: $$\int_{x_0}^{x} g(u)\,du = \int_{t_0}^{t} f(v)\,dv \qquad \left(\int g(x)\,dx = \int f(t)\,dt\right)$$

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{g(x)}$$

$$g(x)\,dx = f(t)\,dt \; / \int$$

Кошијев проблем: $x' = f(t,x)$

$x(t_0) = x_0 \leftarrow$ Кошијев услов

n-тог реда:

$x(t_0) = x_0$

$x'(t_0) = x_1$

$\vdots$

$x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$

(зад. 3 и 4)

(6) $t\cdot x' = x$. Наћи ОР и пр тд. $x(-3) = \frac{1}{3}$.

$$t\cdot\frac{dx}{dt} = x \quad \text{(раздв. пром.)}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \; / \int \qquad x \neq 0, \; t \neq 0$$

$$\ln|x| = \ln|t| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

↑ није диф.

$x \quad t$

$$\ln|x| = \ln|t| + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

$e^{\sqcup}$

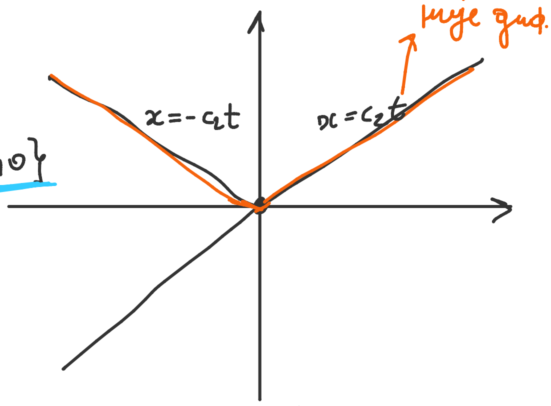
$$|x| = |t| \cdot C_1 \quad , C_1 = e^C > 0$$

$C_2 = \pm C_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x = 0 \checkmark$

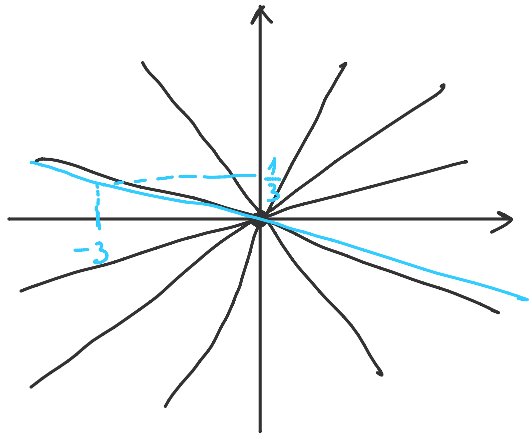
$t=0: \quad 0 \cdot x'(0) = x(0) \Rightarrow x(0) = 0$

$$\boxed{x = C_2 \cdot t \quad , C_2 \in \mathbb{R}} \text{ OP}$$



$x(-3) = \frac{1}{3}: \quad \frac{1}{3} = C_2 \cdot (-3) \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{9}$

ПР: $x(t) = -\frac{t}{9}$



(7) $x' = \dfrac{2xt}{t^2-1}$. Решити ДЈ, скицирати решења ↳ интегралне криве

$\boxed{|t| \neq 1}$

Наћи ПР: а) $x(0) = 1$

б) $x(2) = 1$

$$x' = \frac{dx}{dt} = x \cdot \frac{2t}{t^2-1}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2t\,dt}{t^2-1} \quad /\int$$

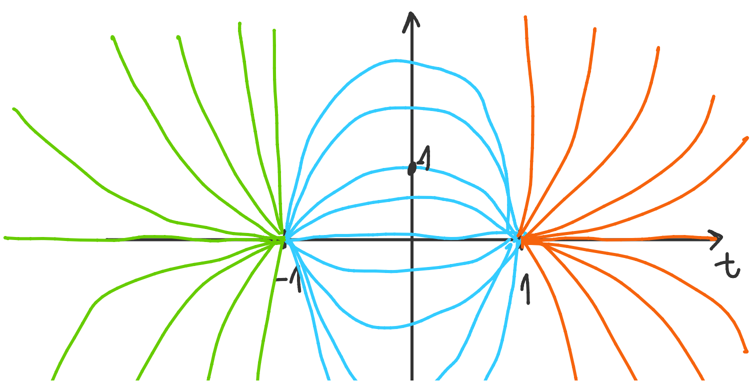
$$\ln|x| = \ln|t^2-1| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$|x| = |t^2-1| \cdot C_1 \quad , C_1 = e^C > 0$$

$C_2 = \pm C_1, \quad x \equiv 0 \checkmark$
$(C_2 = 0)$

$$\boxed{x = C_2(t^2-1)} \text{ OP} \quad , C_2 \in \mathbb{R} \quad , t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

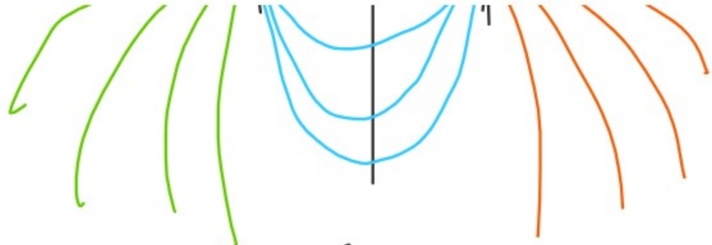
$t \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$



$1°\ t \in (-1,1)$

$2°\ t \in (-\infty,-1)$

$3°\ t \in (1,+\infty)$



а) $x(0)=1$, $0\in(-1,1)$

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=c_2(t^2-1)\\ 1&=c_2(0^2-1)\\ c_2&=-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x=1-t^2,\quad t\in(-1,1)}$$

б) $x(2)=1$, $2\in(1,+\infty)$

$$\left.\begin{aligned} 1&=c_2(2^2-1)\\ c_2&=\frac{1}{3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x=\frac{t^2-1}{3},\quad t\in(1,+\infty)}$$

За домаћи: $x'=kx^2,\ k>0$ → једначина експлозије } решити, показати да решење није деф. на целом $\mathbb{R}$ и да се не може продужити

(8) Наћи све C^1 функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ тд. $f(0)=1$ и:

површина испод графика од f од 0 до x_0

$=$

дужини лука од f од 0 до x_0 } $\forall x_0\geq 0$

$$\int_0^{x_0} f(u)\,du=\int_0^{x_0}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du \quad \Big/\ '_{x_0}$$

$$f(x_0)=\sqrt{1+f'(x_0)^2}\ \Big/^2 \longrightarrow f\geq 1$$

$$f^2=1+f'^2$$

$$f^2-1=f'^2$$

$$f'=\pm\sqrt{f^2-1},\quad f\neq 1 \quad (f=1?)$$

$- \Rightarrow f'<0 \Rightarrow f\searrow + f(0)=1 \Rightarrow f<1$ ↯

$f'=\frac{df}{dx_0}$

$$\frac{df}{\sqrt{f^2-1}}=dx_0 \quad \Big/\int$$

⋮

?