Консултације

Погледајте фајл са решењима јун2 2019.

1) f диф. $f:\mathbb{R}\to \underbrace{(0,\infty)}_{f>0}$

$$\underline{f'(x)} = \underbrace{f(f(x))}_{>0} \Rightarrow f'>0 \Rightarrow f \text{ расте}$$

$$f''(x) = \underline{f'(f(x))}\cdot f'(x) > 0 \Rightarrow f''>0 \Rightarrow f \text{ конвексна}$$

$$f'''(x) = f''(f(x))\cdot f'(x)\cdot f'(x) + f'(f(x))\cdot f''(x) > 0$$

индукцијом: $\underbrace{f \text{ је } n \text{ пута}}_{f\in C^\infty(\mathbb{R})}$ диф и $f^{(n)}>0$

→ у фајлу како се завршава

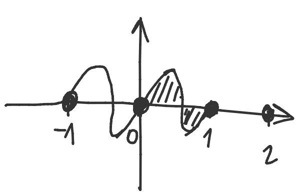
2) $f\in C^1([0,1])$, $g\in C(\mathbb{R})$

g 1-пер. и непарна

$g(x)=-g(-x)$

$g(0)=-g(0) \Rightarrow g(0)=0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)\,dx = 0$$



$$g(x) = -g(-x)$$

$$\int_0^1 f(x)g(nx)\,dx = f(\xi)\cdot\int_0^1 g(nx)\,dx = f(\xi)\cdot\int_0^n g(t)\cdot\frac{dt}{n} = f(\xi)\cdot\frac{\int_0^n g(t)\,dt}{\underline{n}} =$$

ИТ о ср. бр. , $\xi\in(0,1)$ $\qquad nx=t$

$$= f(\xi)\cdot\int_0^1 g(t)\,dt = 0 \quad / \lim_{n\to\infty}$$

$$\int_0^n g(t)\,dt = \int_0^1 + \int_1^2 + \dots + \int_{n-1}^n = n\cdot\int_0^1 g(t)\,dt$$

g 1-пер

$$\underset{0}{\;}\qquad \underset{0}{\;}\;\underset{1}{\;}\;\ldots\;\underset{n-1}{\;} \quad = n\int_0 g(t)\,dt$$

g 1-пер.

$$\int_0^1 g(t)\,dt \underset{t=1-u}{=} \int_1^0 g(1-u)\cdot(-du) = \int_0^1 \underbrace{g(1-u)}_{=g(-u)=-g(u)}\,du = -\int_0^1 g(u)\,du \Rightarrow \int_0^1 g(t)\,dt = 0$$

→ у фајлу другачије решење

3) $$\int_1^{+\infty} e^{x^2}\cdot\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left[\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right]dx$$

$$\frac{\boxed{\cos x}\cos\frac{1}{x} - \boxed{\sin x}\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\int_1^{+\infty}\left|\cos x\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right|dx \geq \underbrace{\left|\cos\cdot\cos\cdot\frac{1}{2x}\right|}_{\text{див}} - \underbrace{\left|\cos\cdot\cos\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right|}_{\text{конв.}}$$

$$\left|\cos x\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2x}\right| \qquad \text{и} \qquad \left|\underbrace{\cos x\cdot\cos\frac{1}{x}}_{\leq 1}\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq \left|o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq \frac{M}{x^2},\ M>0$$

конв.

$$|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\cos\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2},\ x\geq 2$$

$$\geq C\cdot\frac{1+\cos 2x}{2x}$$

Дир конв.

див.

→ цело решење у фајлу

$+\infty \qquad +\infty$

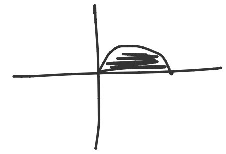
- $\int_1 \frac{1}{x} - \int_1 \frac{1}{x+1} \longrightarrow \frac{1}{x(x+1)} \sim \frac{1}{x^2}$

- $\int_0^1 \frac{|\log(x)|^\alpha}{(\sin(\pi x))^\beta}\,dx$

$|\log(x)| \geq 0$

$\sin(\pi x) \geq 0$

$f \geq 0$ ΠK ✓



$\alpha = 0, \beta = 0$

$\beta > 0$: 0 u 1

$\alpha \in \mathbb{R}$: 0

$\alpha < 0$: u 1

$(\sin(\pi x))^\beta \sim (\pi x)^\beta, \quad x \to 0$

$\log(x) \leq 0$

$\int^{+\infty} \frac{1}{x^p \cdot \log^q(x)}$

$\int_0^1 \frac{|\log(x)|^\alpha}{(\sin \pi x)^\beta}\,dx$

x	0	1
t	$+\infty$	1

$x = \frac{1}{t}$

$dx = -\frac{dt}{t^2}$

$\log\left(\frac{1}{t}\right) = -\log t$

$$= \int_{+\infty}^1 \frac{(\log|t|)^\alpha}{\left(\sin\frac{\pi}{t}\right)^\beta} \cdot \left(-\frac{dt}{t^2}\right)$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{(\log t)^\alpha}{t^2 \left(\sin\frac{\pi}{t}\right)^\beta} \sim \frac{1}{(\log t)^{-\alpha} \cdot t^{2-\beta}}, \quad t \to +\infty$$

$+\infty$: $\sin\left(\frac{\pi}{t}\right) \sim \frac{\pi}{t}$

$\frac{1}{t} \to 0+$

$(2-\beta > 1) \vee (\beta = 1 \wedge -\alpha > 1)$

$t \to t+1$

$u = t - 1 \to 0$

$$\frac{(\log(1+u))^\alpha}{\left(\sin\frac{\pi}{1+u}\right)^\beta}$$

$\log(1+u)^\alpha \sim u^\alpha$

$u^{\alpha-\beta}$, $\boxed{\alpha - \beta > 1}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{1+u}\right)^\beta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{1+u}\right)^\beta = \sin\left(\overset{\to 0}{\frac{u\pi}{1+u}}\right)^\beta \sim \left(\frac{u\pi}{1+u}\right)^\beta \sim c \cdot u^\beta$$

$$-xe^{-x} \leqslant f(x) \leqslant (x^2+3x+7)e^{-x} \quad \Big/ \lim_{x\to\infty}$$

$e^{-x} \to 0$, $e^{-x} \to 0$

$f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$a_n = f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Хајне}} 0$

$-\varepsilon < \min\{f(n), f(n+1)\} \leq f(x) \leq \max\{f(n), f(n+1)\} < \varepsilon$ ✓

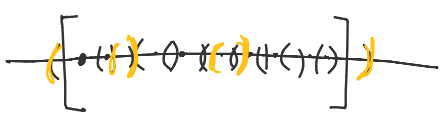
$n \leq x \leq n+1$

2. (а) Формулисати и доказати Борел-Лебегову лему.

(б) Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција таква да за свако $x \in \mathbb{R}$ постоји $\epsilon_x > 0$ такво да је извод f' дате функције ограничен на интервалу $(x - \epsilon_x, x + \epsilon_x)$.

1) Доказати да је извод f' ограничен на произвољном сегменту $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

2) Доказати да је функција f равномерно непрекидна на сваком сегменту $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Да ли f мора бити равномерно непрекидна на читавом $\mathbb{R}$?



a b

$[a,b]$ - затв.

$(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x)$ - покривач

$\Rightarrow \exists$ коначан потпокривач

$\exists m$ интервала који покривају

$M_1, \dots, M_m$ - ограничења за f

$M = \max\{M_1, \dots, M_m\}$ - огр. на $[a,b]$.

2) $\left|f(x)-f(y)\right| = \left|f'(\xi)\right| \cdot |x-y| \le M \cdot |x-y|$

нпр. e^x