Анализа 1 - јун 1

Математички факултет, Универзитет у Београду
Испитни рок јун 1 из Анализе 1, токови 102 и 103
12.6.2021.

1. Нека је дата функција $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ са $f(x) = \sqrt[3]{x^5} \sin \frac{\pi}{x} + |x^2 + 2x|$.

   а) [4] Одредити $c \in \mathbb{R}$ тако да је функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дата са

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq 0 \\ c & , x = 0 \end{cases}$$

   непрекидна.

   б) [11] Испитати диференцијабилност функције $g$.

---

а) Да би ф-ја $f$ била непрекидна, мора важити

$$c = \lim_{x \to 0} f(x),$$

јер је функција $f$ непрекидна ван 0 као композиција непрекидних. Сада рачунамо:

$$c = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{x^5}\sin\frac{\pi}{x} + |x^2+2x|\right)$$

ако оба кв. ∃

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\sqrt[3]{x^5}}_{\to 0} \underbrace{\sin\frac{\pi}{x}}_{\text{ограничен}} + \lim_{x\to 0} |x(x+2)| \quad 0 \cdot 2 = 0$$

$$= 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

ПАЖЊА: Велики број студената је правио следећу грешку:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = 1$$

односно писан је развој

$$\sin\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{x} - \frac{\left(\frac{\pi}{x}\right)^3}{3!} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \to 0$$

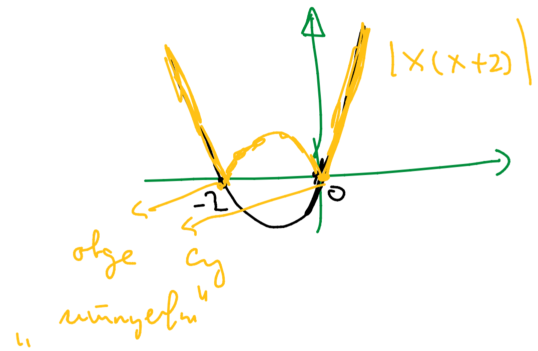
Ово наравно није тачно јер $\frac{\pi}{x} \not\to 0$ када $x \to 0$

б) функција $\sqrt[3]{x^5}\sin\frac{\pi}{x}$ је диференцијабилна свуда осим у 0

функција $|x(x+2)|$ је диференцијабилна свуда осим у 0 и $-2$

Функција $|x(x+2)|$ је диференцијабилна свуда сем у 0 и $-2$

ПАЖЊА: Већина је заборавила да испита $-2$




Дакле, функција $g$ је диференцијабилна за све $x \in \mathbb{R}$ осим евентуално за $x=0$ и $x=-2$. Проверимо те две.

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - \overset{=0}{f(0)}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^5}\sin\frac{\pi}{h} + \overset{>0 \text{ за } h>0}{|h^2+2h|}}{h}$$

$= h(h+2)$ ← скратимо са $h$

$$= \lim_{h\to 0^+} \underbrace{h^{\frac{2}{3}}}_{\to 0} \underbrace{\sin\frac{\pi}{h}}_{\text{ограничен}} + \lim_{h\to 0^+}(h+2) = 2$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h^5}\sin\frac{\pi}{h} + \overset{<0 \text{ на } h\in(-2,0)}{|h^2+2h|}}{h}$$

$-h(h+2)$

$$= \lim_{h\to 0^-} \underbrace{h^{\frac{2}{3}}}_{\to 0} \underbrace{\sin\frac{\pi}{h}}_{\text{ограничен}} + \lim_{h\to 0^-}\left(-(h+2)\right)$$

$$= -2$$

Како је $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, то она није диференцијабилна у 0.

Остаје да проверимо $x = -2$.

негативно јер је $\in(-2,0)$

$$\cancel{\sqrt[3]{(-2)^5}\cdot\sin\frac{\pi}{-2}} + \underbrace{|(-2)^2 + 2\cdot(-2)|}_{=0}$$

$$f'_+(-2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{\sqrt[3]{(-2+h)^5}\sin\frac{\pi}{-2+h}} + |(-2+h)^2 + 2(-2+h)| - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-(-2+h)^2 - 2\cdot(-2+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{-4}+4h-h^2\cancel{+4}-2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0^+}(-h+2) = 2$$

→ [illegible] $\cancel{\sqrt[3]{(-2)^5}\sin\frac{\pi}{-2}} + \underbrace{|(-2)^2-2\cdot(-2)|}_{=0} = f(-2)$

$$f'_-(-2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{\sqrt[3]{(-2+h)^5}\sin\frac{\pi}{-2+h}} + |(-2+h)^2+2(-2+h)| - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{4}-4h+h^2\cancel{-4}+2h}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-2+h) = -2$$

па ф-ја $g$ није диференцијабилна у $x=-2$.

2. а) [14] Доказати да је
$$2\sin x - 3x + \operatorname{tg} x > 0$$
за све $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

б) [4] Нека је дата функција $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ са
$$f(x) = \frac{x - \operatorname{tg} x}{\sin x - x}.$$
Доказати да је $f(x) > 2$ за све $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

в) [9] Наћи $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

---

Решење: а) Дефинишимо ф-ју $g(x) = 2\sin x - 3x + \operatorname{tg} x$.

$$g(0) = 2\sin 0 - 3\cdot 0 + \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0$$

Важи, $g'(x) = 2\cos x - 3 + \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$= \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x(\cos x - 1) - (\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos x - 1)\cdot(2\cos^2 x - \cos x - 1)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\overbrace{(\cos x - 1)(\cos x - 1)}^{>0}\cdot\overbrace{(2\cos x + 1)}^{>0 \text{ за } x\in(0,\frac{\pi}{2})}}{\underbrace{\cos^2 x}_{>0}} > 0$$

$\Rightarrow$ $g$ је растућа на $(0, \frac{\pi}{2})$ и $g(0) = 0$

$\Rightarrow$ $g(x) > 0$ за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

б) $f(x) = \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{\sin x - x} \overset{?}{>} 2 \quad \Big/ \cdot (\sin x - x) < 0$ на $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ $x - \operatorname{tg} x < 2\sin x - 2x$

$\Leftrightarrow$ $2\sin x - 3x + \operatorname{tg} x > 0$ а ово је показано из дела а)

в) Приметимо да је

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{tg} x}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x} - \left(\cancel{x} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{\left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 2$$

и $\lim \dfrac{\overset{\nearrow \frac{\pi}{2}}{x} - \overset{\nearrow +\infty}{\operatorname{tg} x}}{\phantom{x}} = +\infty$, па како је $f(x) > 2$ из дела и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \dfrac{x-\operatorname{tg}x}{\underset{\downarrow\,1}{\sin x} - \underset{\downarrow\,\frac{\pi}{2}}{x}} = +\infty$, па како је $f(x)>2$ из дела

под б) и $f$ непрекидна, то је слика $f((0,\frac{\pi}{2})) = (2,+\infty)$.

3. Нека је дат низ интеграла

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|x|\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\,dx,\ n \geqslant 1.$$

а) [9] Доказати да је $I_n = \int\limits_0^\pi \frac{x\sin nx}{\sin x}\,dx$.

б) [3] Наћи $I_1$ и $I_2$.

в) [9] Наћи везу између $I_n$ и $I_{n-2}$.

г) [6] Да ли низ $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира? Одредити број тачака нагомилавања низа $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

д) [6] Доказати да постоји реалан број $A$ такав да ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |A - I_n| \sin\frac{(n+1)\pi}{2}$$

конвергира.

---

Решење: а) $I_n = \int\limits_{-\pi}^{0} \underbrace{\frac{|x|\sin nx}{(1+2^x)\sin x}}_{x=-t}\,dx + \int\limits_0^\pi \frac{\overset{\geq 0}{|x|}\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\,dx$ ← јер желимо $\int\limits_0^\pi$

$$= \int_0^\pi \frac{|-t|\sin(-nt)}{(1+2^{-t})\sin(-t)}\,\Big/\frac{\cdot 2^t}{\cdot 2^t}\,dt + \int_0^\pi \frac{x\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\,dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{2^t\cdot \overset{\geq 0\ =t}{|t|}\sin(nt)}{(1+2^t)\sin t}\,dt + \int_0^\pi \frac{x\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\,dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{\cancel{(2^x+1)}\,x\sin nx}{\cancel{(1+2^x)}\,\sin x}\,dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{x\sin(nx)}{\sin x}\,dx$$

б) $I_1 = \int\limits_0^\pi \frac{x\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}\,dx = \int\limits_0^\pi x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$

$$= \int_0 \frac{\ }{\cancel{\sin x}} \ldots \int_0 x\,dx = \frac{\ }{2}\Big|_0 = \frac{\ }{2}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{x\sin(2x)}{\sin x}\,dx = 2\int_0^{\pi} \frac{x\cancel{\sin x}\cos x}{\cancel{\sin x}}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} \qquad \begin{array}{l|l} u = x & dv = \cos x\,dx \\ du = dx & v = \sin x \end{array}$$

$$= 2\cdot\left(\cancel{x\sin x\Big|_0^{\pi}} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx\right) \qquad \cancel{x\sin x\Big|_0^{\pi}} \to 0$$

$$= 2\cdot\cos x\Big|_0^{\pi} = 2\cdot(\cos\pi - \cos 0)$$

$$= 2\cdot(-1-1) = -4$$

в) Нађимо разлику

$$I_n - I_{n-2} = \int_0^{\pi}\frac{x\sin(nx)}{\sin x}\,dx - \int_0^{\pi}\frac{x\sin((n-2)x)}{\sin x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{x\cdot(\sin(nx) - \sin((n-2)x))}{\sin x}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi}\frac{x\cos\frac{nx+(n-2)x}{2}\sin\frac{nx-(n-2)x}{2}}{\sin x}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi}\frac{x\cos((n-1)x)\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi}\underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos((n-1)x)\,dx}_{dv} \qquad \begin{array}{l|l} u = x & dv = \cos((n-1)x)\,dx \\ du = dx & v = \frac{1}{n-1}\sin((n-1)x) \end{array}$$

$$= 2 \cdot \left( \cancel{\frac{1}{n-1} x \sin((n-1)x) \Big|_0^{\pi}} - \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi} \sin(n-1)x \, dx \right)$$

0 због sin

$$= \frac{2}{(n-1)^2} \cos((n-1)x) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{(n-1)^2} \cdot \left( \cos((n-1)\pi) - \overset{1}{\overset{\parallel}{\cos 0}} \right)$$

$$= \frac{2}{(n-1)^2} \cdot \left( (-1)^{n-1} - 1 \right) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(n-1)^2}, & n \text{ парно} \\ 0, & n \text{ непарно} \end{cases}$$

г) Дакле, имајући у виду б) и в) закључујемо

$$\frac{\pi^2}{2} = I_1 = I_3 = I_5 = \ldots$$

$$I_2 = -4, \quad \left.\begin{aligned} I_4 - I_2 &= -\frac{4}{3^2} \\ I_6 - I_4 &= -\frac{4}{5^2} \\ &\vdots \\ I_{2n} - I_{2n-2} &= \frac{-4}{(2n-1)^2} \end{aligned}\right\} +$$

$$I_{2n} - I_2 = -4 \cdot \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right)$$

$$\Rightarrow I_{2n} = -4 \cdot \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right)$$

⇒ низ није кв. јер смо нашли две Т.Н.

$$\left(\frac{\pi^2}{2} \text{ и } -4\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\right) \text{ које нису једнаке}$$

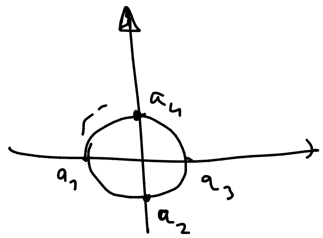
→ кв. по претходном

(једна позитивна, друга не)

Дакле, низ $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ има 2 Т.Н.

Д₁) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|A-I_n|\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$ ← погледајмо за почетак $\sin$

$$a_n=\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$$




Дакле, за $n$ непарно општи члан је 0, док је за парне наизменично $-1$, $1$.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}|A-I_{2n}|(-1)^n$$

↓ само парни остају

Да би ред кв., општи члан мора тежити 0, па је једини кандидат за $A=\lim_{n\to+\infty} I_{2n}$ (A је коначно по претходном критеријуму)

Како је низ $I_{2n}$ опадајући, такав је и $|A-I_{2n}|$ па за наведено A важи да је ред кв. по Лајбницу.

4. [25] Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{3}\left(\sqrt{\frac{(1+n)^3}{n}}+an+b\right)$$

у зависности од реалних параметара $a$ и $b$.

Решење: Да би ред конвергирао, општи члан мора тежити 0, па мора бити

$$\lim\left(\sqrt{\frac{(1+n)^3}{n}}+an+b\right)=0$$

па мора бити $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{(1+n)^3}{n}}+an+b\right)=0$

$$\sqrt{\frac{(1+n)^3}{n}} = n\sqrt{\frac{(1+n)^3}{n^3}}$$

$$= n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \binom{\frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8}$$

$$= n\cdot\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{n}+\binom{\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n+\frac{3}{2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{a=-1}$ и $\boxed{b=-\frac{3}{2}}$

$c_n=\sqrt{\frac{(1+n)^3}{n}}-n-\frac{3}{2}=\frac{3}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$, па даље $c_n$ опадајуће тежи ка 0 за довољно велике $n$.

Како $\sum \sin\frac{n\pi}{3}$ има ограничен низ парцијалних сума то по Дирихлеовом критеријуму дати ред кв. за $a=-1$ и $b=-\frac{3}{2}$.

Што се тиче апсолутне кв., имамо

$$\sum\Big|\sin\frac{n\pi}{3}\underbrace{c_n}_{c_n>0}\Big| = \sum\left|\sin\frac{n\pi}{3}\right|c_n \geq \sum \sin^2\frac{n\pi}{3}\,c_n$$

$$\sin^2\frac{n\pi}{3} = \frac{1-\cos\frac{2n\pi}{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sum c_n}_{\text{дивергира}} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum \cos\frac{2n\pi}{3}c_n}_{\text{кв. по Дирихлеу}}$$

јер $c_n \sim \frac{\frac{3}{8}}{n}$

$\Rightarrow$ ред апсолутно дивергира.

Дакле, ред условно кв. за $a = -1$ и $b = -\frac{3}{2}$, а иначе дивергира.