Понедељак 30.11.2020.

① $\boxed{\begin{array}{c} d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,+\infty) \\ d(x,y) := |x-y| \end{array}}$ Стандардно растојање (Стандардна метрика) → доказати да је метрика

скупови

Својства:

(М1) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

Недегенерисаност метрике

(М2) $d(x,y) = d(y,x)$

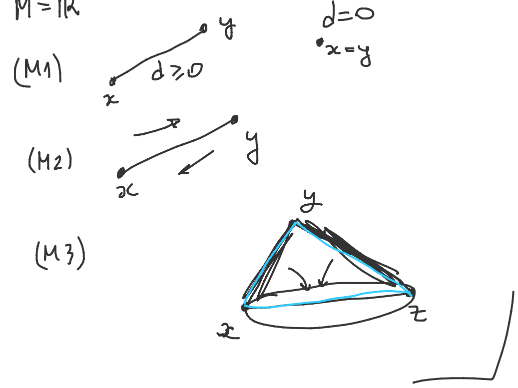
симетричност

(М3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Неједнакост троугла

Метрика на M, тј. пресл. $d: M\times M \to \mathbb{R}$ које задовољава својства (М1), (М2), (М3)

пр. $M = \mathbb{R}^2$



(М1) $d(x,y) = |x-y| \geq 0$

$d(x,y) = |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

(М2) $d(x,y) = |x-y| = |-(x-y)| = |y-x| = d(y,x)$

$|t| = |-t|$

(М3) $|x-z| \leq \underbrace{|x-y|}_{A} + \underbrace{|y-z|}_{B}$? $\forall x,y,z$

$x-z = (x-y)+(y-z) = A+B$

Хоћемо $\boxed{|A|+|B| \geq |A+B|}$ (∗) $\forall A,B$ $\xrightarrow{A=x-y,\ B=y-z}$ ✓

1° $A,B \geq 0 \Rightarrow A+B \geq 0$

$|A| = A$

$|B| = B$

$|A+B| = A+B$

$|A|+|B| \geq |A+B|$ (∗)

$\Leftrightarrow$

$A+B \geq A+B$ ✓ (чак =)

2° $A,B < 0 \Rightarrow A+B<0$

(∗) $\Leftrightarrow -A+(-B) \geq -(A+B)$

$|A| = -A$

$|B| = -B$

$|A+B| = -A-B$

$-A-B \geq -A-B$ ✓ (чак =)

3° $\left.\begin{array}{l} A\geq 0 \\ B<0 \end{array}\right\}$ (БУО)

3.1° $A+B \geq 0$

$(*) \Leftrightarrow A-B \geq A+B \Leftrightarrow -B \geq B \Leftrightarrow 2B \leq 0 \Leftrightarrow B \leq 0$ ✓

3.2° $A+B<0$

$(*) \Leftrightarrow A-B \geq -(A+B) \Leftrightarrow A-B \geq -A-B \Leftrightarrow A \geq -A \Leftrightarrow 2A \geq 0 \Leftrightarrow A \geq 0$ ✓

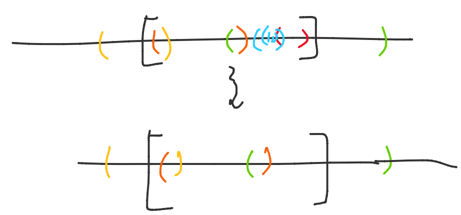
② ($\mathbb{R}$ није коначан затворен инт. тј. $\mathbb{R} \neq [a,b]$ за све $-\infty<a<b<+\infty$. Доказати!)

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Γ ппс $\mathbb{R}=[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} b+1 \in \mathbb{R} \\ b+1 \notin [a,b] \end{array}\right\} \lightning$ ⌋

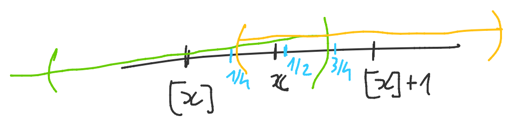
Теорема: (БОРЕЛ-ЛЕБЕГОВА теорема) Свако отворено покривање $\mathcal{J}$ сегмента $[a,b]$, $-\infty<a<b<+\infty$, има коначно потпокривање.



ппс $\mathbb{R}=[a,b] \overset{БЛ}{\Longrightarrow}$ Свако отв. покривање од $\mathbb{R}$ има коначно потпокривање!

Фамилија $\{(m-\frac{3}{4}, m+\frac{3}{4}) : m \in \mathbb{Z}\} = \Phi$ нема коначно потпокривање од $\mathbb{R}$. ← зашто?

1) Φ покрива $\mathbb{R}$?

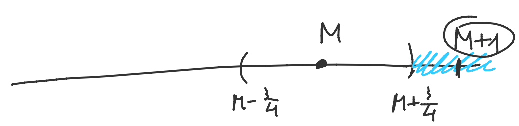


$\cup \Phi = \mathbb{R}$?

$x \in \mathbb{R}$, $([x]-\frac{3}{4}, [x]+\frac{3}{4}) \ni x$, $\{x\} < \frac{3}{4}$

$(([x]+1)-\frac{3}{4}, ([x]+1)+\frac{3}{4}) \ni x$, $\{x\} > \frac{3}{4}$ $\Big\} \Rightarrow x \in \cup \Phi$

2) Нема коначно потпокривање?



ппс − има!

$K \subseteq \mathbb{Z}$ − коначан

$\{(m-\frac{3}{4}, m+\frac{3}{4}) \mid m \in K\} = \Gamma$ − коначно потпокривање од Φ

$M = \max K \in \mathbb{Z}$

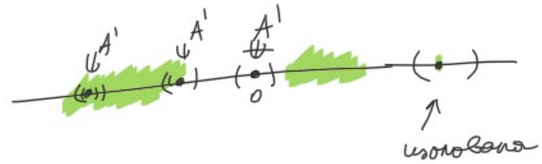
↳ постоји јер је K коначан

$M+1 \notin \cup \Gamma$ ↯

$M+1 \notin \bigcup \Gamma$ ↯

$M+1 \in \mathbb{R}$

Деф: Тачка $x_0 \in \mathbb{R}$ назива се **ТАЧКОМ НАГОМИЛАВАЊА** скупа $A \subset \mathbb{R}$ ако свака њена ε-околина → $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ садржи бесконачно много тачака скупа A. Скуп свих тачака нагомилавања означавано са A'. Скуп $\overline{A} := A \cup A'$ назива се **ЗАТВОРЕЊЕМ** скупа A. Ако је $A = \overline{A}$ онда кажемо да је скуп A **ЗАТВОРЕН**.
Тачка $x_0 \in A$ која није тачка нагомилавања назива се **ИЗОЛОВАНОМ ТАЧКОМ** скупа A.
Руб скупа $A \subset \mathbb{R}$ је скуп
$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R} \setminus A)} = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$



③ $A = [1,3) \cup \{10\}$

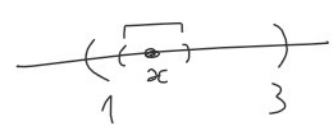
10 није Т.Н. скупа A
$10 \in A \Rightarrow 10$ је изолована тачка скупа A

$A' = ?$, $\partial A = ?$ (домаћи)

$A' = ? \longrightarrow A' = [1,3]$ ← доказујемо

1° $[1,3]$ јесу т.н.

$x \in [1,3]$, $\varepsilon > 0$ (→ произ. (узмемо мало)) $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A$

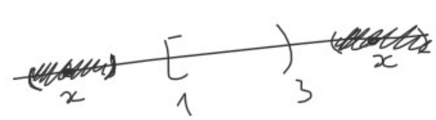


1.1° $x = 1$: $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cap A = [1, 1+\varepsilon)$ ← беск. тачака

1.2° $x \in (1,3)$: $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ← ∞

1.3° $x = 3$: $(3-\varepsilon, 3+\varepsilon) \cap A = (3-\varepsilon, 3)$ ← ∞

2° $\mathbb{R} \setminus [1,3]$ нису т.н.



$x \in [1,3]^c = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

2.1° $x \in (-\infty, 1)$

јесте ТН $\Rightarrow \forall \varepsilon$
није ТН $\Rightarrow \exists \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{1-x}{2}$$

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \left(x - \frac{1-x}{2}, x + \frac{1-x}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \left(x - \frac{1-x}{2}, x + \frac{1-x}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \emptyset$$

2.2° $x \in (3, +\infty)$

$$\varepsilon = \frac{x-3}{2}$$

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \left(x - \frac{x-3}{2}, x + \frac{x-3}{2}\right) = \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}, \frac{3x}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{3}{2} > \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \subseteq \{10\}$$

није ∞

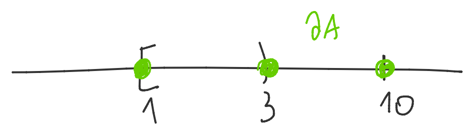
$$\Rightarrow A' = [1,3]$$

$$\Rightarrow \overline{A} = A \cup A' = [1,3) \cup \{10\} \cup [1,3] = [1,3] \cup \{10\}$$

$$A^C = (-\infty, 1) \cup [3,10) \cup (10, +\infty) \rightarrow \boxed{(A^C)' = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)} \Rightarrow \overline{A^C} = A^C \cup (A^C)' = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

домаћи

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^C} = \left([1,3] \cup \{10\}\right) \cap \left((-\infty, 1] \cup [3, +\infty)\right) = \{1\} \cup \{3\} \cup \{10\}$$



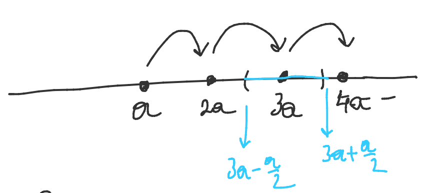
⊛ $A \neq \overline{A} \Rightarrow A$ није затворен

Теорема: (Болцано-Вајерштрасова теорема)
Сваки бесконачан и ограничен подскуп $A \subset \mathbb{R}$ има тачку нагомилавања.

контрапозиција БВ:
A нема ТН $\Rightarrow A$ коначан $\vee$ A неограничен

(4) Болцано-Вајерштрас $\Rightarrow$ (АРХ)+(КАН)

1) (БВ) $\Rightarrow$ (АРХ)



$a > 0$ произвољно

$$A = \mathbb{N}a = \{a, 2a, 3a, \dots\} = \{na \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$$

$m \in \mathbb{N}$, $m \cdot a$ није ТН скупа A јер

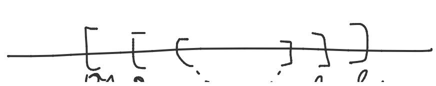
$$\varepsilon = \frac{a}{2}$$

$$\left(ma - \frac{a}{2}, ma + \frac{a}{2}\right) \cap A = \{ma\}$$ ← нема ∞ тачака

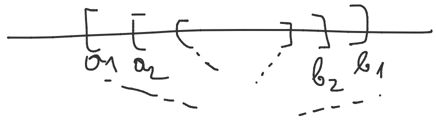
(БВ) A нема ТН $\Rightarrow$ A неограничен $\Rightarrow$ (АРХ)

A бесконачан

2) (БВ) $\Rightarrow$ (КАН)



2) (ОБ) $\Rightarrow$ (КАН)



$A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$

$B = \{b_1, \dots, b_n, \dots\}$

$\left.\begin{array}{l} A \subseteq [a_1, b_1] \\ B \subseteq [a_1, b_1] \end{array}\right\}$ A, B ограничени

$\Rightarrow A, B$ имају тачку нагомилавања

$\uparrow a \quad \uparrow b$

$\Rightarrow a = \sup A$, $b = \inf B$

$a_n \le a \le b \le b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

↳ доказивали у самом доказа са прошлог часа

Деф: Подскуп $U \subset \mathbb{R}$ је **ОТВОРЕН** ако је он унија неке фамилије отворених интервала. ($\emptyset$ је по деф. отворен интервал), $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda)$

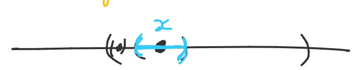
пр. (a,b) отв. $\mathbb{R}$ отв.

пр. $[a,b]$ затв. $\mathbb{R}$ затв.

A отв. $\not\Rightarrow$ није затв.

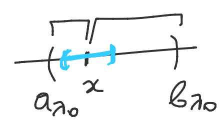
$[a,b)$ није ни отв. ни затв.

(5) U отворен $\Leftrightarrow (\forall x \in U)(\exists \varepsilon > 0)\ (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$. → ово се може узети за деф. отвореног скупа



$\boxed{\Rightarrow}$ $x \in U$ произв.

$\left.U \text{ отв} \Rightarrow U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda)\right\} \Rightarrow (\exists \lambda_0)\ x \in (a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0})$



Нап: T21 53. страни у скрипти

Λ из деф. отв. скупа се може узети да је пребројива

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{x - a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0} - x\} = \frac{1}{2}\min\{d(x, a_{\lambda_0}), d(x, b_{\lambda_0})\}$$

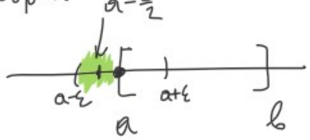
за ово ε: $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}) \subseteq U$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $(\forall x \in U)(\exists \varepsilon_x > 0)\ (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) \subseteq U$

$$U = \bigcup_{x \in U} (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \quad ✓$$

(6) $[a,b]$ није отворен $a-\varepsilon$

⑥ $[a,b]$ није отворен



$$\neg\Big((\forall x\in[a,b])(\exists\varepsilon>0)\,(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq \mathcal{U}\Big) \iff (\exists x\in[a,b])(\forall\varepsilon>0)\,(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\not\subseteq[a,b]$$

$x=a$

$\varepsilon>0$ произв.

$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\not\subseteq[a,b]$, јер $a-\frac{\varepsilon}{2}\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\setminus[a,b]$.

⑦ • Скуп $K\subset\mathbb{R}$ је затворен $\iff K^c$ је отворен ($K^c = \mathbb{R}\setminus K$) → ово може да буде и дефиниција затвореног скупа преко отвореног

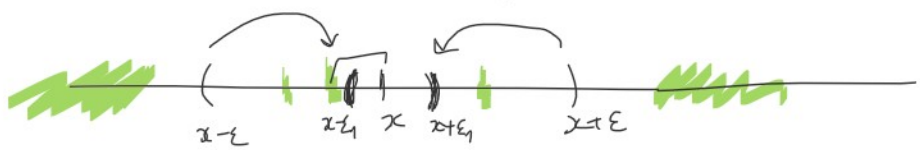
$\boxed{\Rightarrow}$ $x\in K^c=\mathbb{R}\setminus K$

K затв $\Rightarrow K=\overline{K}$

$x\notin K=\overline{K} \Rightarrow x$ није ТН скупа K (x је ТН $\Rightarrow x\in\overline{A}$) $A'\subseteq\overline{A}$

$\Downarrow$

$(\exists\varepsilon>0)$ $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap K$ има само коначно много тачака $\{a_1,\dots,a_t\}$



ε смањимо до ε_1 т.д. избегнемо све тачке — можемо јер их има коначно

$$\varepsilon_1=\frac{1}{2}\min\{d(x,a_1),d(x,a_2),\dots,d(x,a_t)\}$$

$$\Rightarrow (x-\varepsilon_1,x+\varepsilon_1)\cap K=\emptyset \Rightarrow (x-\varepsilon_1,x+\varepsilon_1)\subseteq K^c \Rightarrow K^c \text{ отворен.}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ K затв. $\iff K=\overline{K}$

увек: $K\subseteq\overline{K}=K\cup K'$

довољно $\overline{K}\subseteq K$

$x\in\overline{K}$ произвољно. Хоћемо $x\in K$. ппс $x\notin K \Rightarrow x\in K^c$

$\Downarrow$ $x\in K'$ — ∞ тачака

$\Downarrow$ K^c отв. $(\exists\varepsilon>0)$ $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq K^c \iff (x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap K=\emptyset$ — 0 тачака

↯

$x\in K\cup K'$

$\Rightarrow x\in K. \Rightarrow \overline{K}=K\Rightarrow K$ затворен