Петак 30.10.2020.

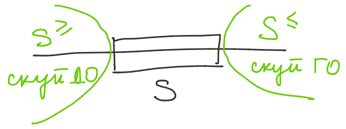
Аксиома супремума: Сваки непразан одозго ограничен скуп ИМА супремум. (Суп)

$S \subseteq A$ $\quad S \neq \emptyset$ $\quad S^{\leq} \neq \emptyset$

Деф: Уређен скуп $(A, \leq)$ је КОМПЛЕТАН (или ПОТПУН) ако у њему важи аксиома супремума. (Суп)

$\sup S = \min S^{\leq}$

$x = \min X \Leftrightarrow x \in X \cap X^{\geq}$



35. Показати да је уређен скуп $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ комплетан. Ако је $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ фамилија подскупова, чему су једнаки $\sup \mathcal{A}$ и $\inf \mathcal{A}$? ($\mathcal{Y}$)

36. Показати да је уређен скуп $(\mathbb{N}, |)$ (природни бројеви са релацијом дели) комплетан.

37. Показати да је уређен скуп $(\mathbb{N}, \leq)$ (природни бројеви са релацијом мање или једнако) комплетан.

домаћи

(35) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ – уређен скуп

$\sup \mathcal{Y} = \min \mathcal{Y}^{\leq} = ?$

$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(A)$ произвољан ($\mathcal{Y}$ је скуп скупова)

$\boxed{\bigcup \mathcal{Y}}$ – да ли је ово $\sup S$?

$\mathcal{Y}^{\leq} = \{T \in \mathcal{P}(A) \mid \mathcal{Y} \leq T\} = \{T \in \mathcal{P}(A) \mid \bigcup \mathcal{Y} \subseteq T\}$

$\bigcup \mathcal{Y} \overset{?}{=} \min \mathcal{Y}^{\leq}$

$(\forall S \in \mathcal{Y})\ S \subseteq T$

$\mathcal{Y}$ је ограничен, па ово постоји

1) $\bigcup \mathcal{Y} \in \mathcal{Y}^{\leq}$ ✓ $\quad (\bigcup \mathcal{Y} \subseteq \bigcup \mathcal{Y})$

$(\mathcal{Y}^{\leq})^{\geq} = \{T \in \mathcal{P}(A) \mid T \leq \mathcal{Y}^{\leq}\}$
$= \{T \in \mathcal{P}(A) \mid T \subseteq \bigcap \mathcal{Y}^{\leq}\}$

2) $\bigcup \mathcal{Y} \in (\mathcal{Y}^{\leq})^{\geq}$ $\Leftrightarrow$

$\bigcup \mathcal{Y} \in \mathcal{Y}^{\leq} \Rightarrow \bigcup \mathcal{Y} \subseteq \bigcap \mathcal{Y}^{\leq}$

(*) пр $A = \{0,1,2\}$ $\qquad \boxed{\bigcup \mathcal{Y} = \{0,1\}}$

$\mathcal{Y} = \{\{0\}, \emptyset, \{0,1\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

$\mathcal{Y}^{\leq} = \{T \mid \bigcup \mathcal{Y} \subseteq T\} = \{T \mid \{0,1\} \subseteq T\} = \{\{0,1\}, \{0,1,2\}\}$

$(\mathcal{Y}^{\leq})^{\geq} = \{T \mid T \subseteq \bigcap \mathcal{Y}^{\leq}\} = \{T \mid T \subseteq \{0,1\}\} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

$\boxed{\{0,1\} = \sup \mathcal{Y}} \Leftrightarrow$ 1) $\underset{\{0,1\}}{\sup \mathcal{Y}} \in \mathcal{Y}^{\leq} = \{\{0,1\}, \{0,1,2\}\}$ ✓

2) $\underset{\{0,1\}}{\sup \mathcal{Y}} \in (\mathcal{Y}^{\leq})^{\geq} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

Домаћи: $\inf \mathcal{Y} = \bigcap \mathcal{Y}$.

$\boxed{\leq \; = \; |}$

(36) $(\mathbb{N}, |)$ $\qquad$ Знамо $A^{\leq}$

$A \subseteq \mathbb{N}$
ограничен

(нпр. A неогр. $A = \{$скуп свих простих$\}$)

$A^{\leq} = \{n \in \mathbb{N} \mid A \leq n\} = \{n \in \mathbb{N} \mid НЗС(A) \mid n\} = \{НЗС(A), 2 \cdot НЗС(A), 3 \cdot НЗС(A), \dots\}$ (*)

$(\forall a \in A)\ a \mid n$

$НЗД(A^{\leq}) = НЗС(A)$

(нпр. A неогр.

$A = \{$скуп свих простих$\}$)

$a \mid n, \forall a \in A$ ×

$A = \{a_1, \dots, a_k\} \longrightarrow a_1 \mid n, a_2 \mid n, \dots, a_k \mid n \rightsquigarrow НЗС(a_1, \dots, a_k) \mid n$

$НЗД(A^{\leq}) = НЗС(A)$

$(A^{\leq})^{\geq} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \mid НЗС(A)\}$ (*)

$(A^{\leq})^{\geq} = \{m \in \mathbb{N} \mid \underbrace{m \leq A^{\leq}}_{(\forall a' \in A^{\leq})\, m \mid a'^{\leq}}\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \mid \underbrace{НЗД(A^{\leq})}\}$

увек ∃ без обзира да ли је $A^{\leq}$ ограничен

(НЗД ≤ од најмањег броја)

Показујемо $\sup A = НЗС(A)$? ✓ (или $A^{\leq}$)

1) $НЗС(A) \in A^{\leq}$ (*) ✓

2) $НЗС(A) \in (A^{\leq})^{\geq}$ (*) ✓

38. Ако је $f : (A, \leq) \to (A', \leq')$ строго монотоно пресликавање при чему је $\boxed{(A, \leq) \text{ тотално уређен}}$ скуп показати да је f ињективно пресликавање.

→ свака 2 ел. упоредива

$(\forall a, a' \in A)\ a \leq a' \lor a' \leq a$

строго растуће ∨ строго опадајуће

Деф. Нека су $(A, \leq)$ и $(A', \leq')$ уређени скупови. Кажемо да је пресликавање ($x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq' f(x_2)$) (релације поретка)
- растуће ако је морфизам из $(A, \leq)$ у $(A', \leq')$
- опадајуће —||— $(A, \leq)$ у $(A', \geq')$
- строго растуће —||— $(A, <)$ у $(A', <')$
- строго опадајуће —||— $(A, <)$ у $(A', >')$

$(A, <), x, y \in A$: $x < y \overset{def}{\Leftrightarrow} x \neq y \land x \leq y$

f је монотоно ако је растуће или опадајуће, а строго монотоно ако је строго растуће или строго опадајуће.

1° претпоставимо да је f строго растуће

$f : (A, <) \longrightarrow (A', <')$ морфизам

$(\forall x, y \in A)\quad x < y \Rightarrow f(x) <' f(y)$

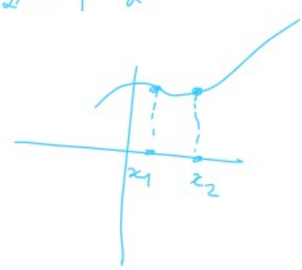
? f ињективно? (1–1)

$(\forall x_1, x_2 \in A)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \lor q) \Leftrightarrow p \land \neg q$

ППС f није ињективно

$\neg\big((\forall x_1, x_2 \in A)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\big) \Leftrightarrow (\exists x_1, x_2 \in A)\ \boxed{f(x_1) = f(x_2)} \land \boxed{x_1 \neq x_2}$



A тот. уређен и $x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1 \leq x_2 \lor x_2 \leq x_1$

БУО (WLOG) without loss of generality

(без умањења општости)

$\boxed{x_1 \leq x_2}$

(што значи да је други случај потпуно исти!) аналоган

$\boxed{x_1 < x_2}$

$x_1 < x_2$

$\boxed{f(x_1) < f(x_2)} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $\lightning$ $f(x_1) = f(x_2)$

39. Нека је $f : (A, \leq) \to (A', \leq')$ изоморфизам структура и нека је $S \subseteq A$. Доказати:

1) $a \in S \Leftrightarrow f(a) \in f(S)$,
2) $a \in S^{\leq} \Leftrightarrow f(a) \in f(S)^{\leq}$,
3) Ако постоји $\max S$ тада је $f(\max S) = \max f(S)$,
4) Ако постоји $\sup S$ тада је $f(\sup S) = \sup f(S)$.

Напомена: Кажемо да је пресликавање изоморфизам структура ако је оно морфизам и бијекција.

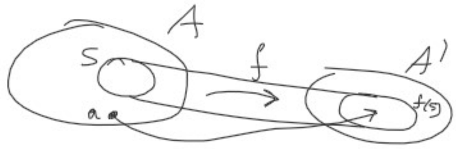
$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq' f(y)$
$(\forall x, y \in A)$

$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\} = \{a' \in A' \mid (\exists s \in S)\ f(s) = a'\}$

директна слика скупа S при пресликавању f (= засек скупа S при релацији f)

1) $a \in S \Leftrightarrow f(a) \in f(S)$

елемент скуп



$\boxed{\Rightarrow}$ $a \in S \Rightarrow f(a) \in f(S) = \{f(a) \mid a \in S\}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $f(a) \in f(S) \overset{?}{\Rightarrow} a \in S$

ППС $\neg(a \in S) \Leftrightarrow a \notin S \Rightarrow f(a) \notin f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$ ✓ $\lightning$

$(f(a) = f(s),\ s \in S)$

2) $a \in S^{\leq} \Leftrightarrow f(a) \in f(S)^{\leq'}$ → $\boxed{(\forall t \in f(S))\ t \leq f(a)}$

ГО

$\boxed{(\forall s \in S)\ s \leq a}$

$\boxed{\Rightarrow}$ ◎ $\Rightarrow$ ◎

нека је $t \in f(S)$ произв.

$\Downarrow 1)$

$t = f(s),\ s \in S$

$\boxed{f(s) \leq f(a)\ ?}$

$s \leq a \ / f$

применимо f (морфизам)

$\boxed{f(s) \leq f(a)}$ ✓

$\boxed{\Leftarrow}$ ◎ $\Rightarrow$ ◎

нека је $s \in S$ произв.

$s \leq a$?

$f(s) \in f(S) \Rightarrow f(s) \leq f(a)$

?

$s \leq a$?

$a \leq s$

(ВРАТИЋЕМО СЕ НА СЛ. ЧАСУ)

Пример: Нека је $(A, \leq)$ уређен скуп и $k \in \mathbb{N}$.
Лексикографски поредак на A^k је $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k\text{-пута}}$
релација $\leq_{Lex}$ дефинисана са

$$a \leq_{Lex} b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a = b \lor a <_{Lex} b$$

где је релација $<_{Lex}$ дефинисана са

$$a <_{Lex} b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a \neq b \land \boxed{a_{\min\{j \mid a_j \neq b_j\}} < b_{\min\{j \mid a_j \neq b_j\}}}$$

Специјално, за $k=2$ то је облика:

$$(a_1, a_2) <_{Lex} (b_1, b_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} a_1 < b_1 \lor$$
$$\lor (a_1 = b_1 \land a_2 < b_2)$$

за $k=3$ релација има облик

$$(a_1, a_2, a_3) <_{Lex} (b_1, b_2, b_3) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$$
$$a_1 < b_1 \lor (a_1 = b_1 \land a_2 < b_2)$$
$$\lor (a_1 = b_1 \land a_2 = b_2 \land a_3 < b_3).$$

$(0,1,0) < (1,1,0)$

$a_1\ a_2\ a_3 \quad b_1\ b_2\ b_3$

пр. $(A = \{0,1\}, \leq) \to (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)$

$k = 3$

$|A^k| = 8$

$(0,1,0) \neq (1,1,0) \qquad \min\{j \mid a_j \neq b_j\} = 1$

$a_1 < b_1$ ✓

$(1,0,1) < (1,1,1)$

$a_1\ a_2\ a_3 \quad b_1\ b_2\ b_3$

$\min\{j \mid a_j \neq b_j\} = 2 \qquad a_2 < b_2$ ✓

40. а) Доказати да је $\leq_{\text{Lex}}$ релација поретка на A^k.
б) Показати да ако је $(A, \leq)$ тотално уређен скуп онда је и $(A^k, \leq_{\text{Lex}})$ тотално уређен скуп.
в) Да ли то исто важи за комплетност?

б) $(A, \leq)$ ТУ $\Rightarrow$ $(A^k, \leq_{Lex})$ ТУ

$x_i, y_i \in A \qquad \boxed{x = (x_1, \ldots, x_k) \quad y = (y_1, \ldots, y_k)} \in A^k$

ако 1° $x = y$ ✓ $\qquad \lor \qquad$ ако 1° $x = y$ ✓

2° $x <_{Lex} y$? $\qquad$ 2° $y <_{Lex} x$

$(x \neq y) \land \underbrace{x_m < y_m}_{m = \min\{j \mid x_j \neq y_j\}} \qquad (x \neq y) \land y_m < x_m$

1) ако $x = y$ ✓ $(x \leq_{Lex} y \land y \leq_{Lex} x)$

$(\forall j \in \{1, \ldots, k\})\ x_j = y_j$ $\neg$

2) $\underbrace{\exists j \in \{1, \ldots, k\} \quad x_j \neq y_j}_{\text{ставимо их у скуп}}$

$\{j \mid x_j \neq y_j\} \subseteq \{1, \ldots, k\} \longrightarrow$ нека је $m = \min\{j \mid x_j \neq y_j\}$

$x_m \neq y_m \implies 2.1) \veebar 2.2)$

2.1) $\boxed{x_m < y_m} \rightsquigarrow x \leq_{lex} y$

2.2) $\boxed{y_m < x_m} \rightsquigarrow y \leq_{lex} x$

јер је A тотално уређен