Понедељак 28.12.2020.

(1) Испитати РН $f(x)=\sqrt{x}$ на $(0,+\infty)$.

на $[0,5]$: f је РН по Кантору

на $[2,+\infty)$:

$(\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y}))$

$$|f(x)-f(y)| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le \frac{|x-y|}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \text{РН}$$

$\sqrt{x}+\sqrt{y} \ge 2\sqrt{2}$

$\ulcorner$ $|f(x)-f(y)| \le M\cdot|x-y|$

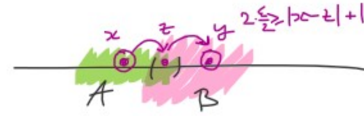
РН, јер $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$:

$$|x-y|<\delta=\frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le M\cdot|x-y| = M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon \lrcorner$$

$\ulcorner$ f је РН на A

на B

$2\cdot\frac{\varepsilon}{2} \ge |x-z|+|z-y| \ge |x-y|$



$(\exists\delta>0)\quad (a-\delta,a+\delta)\subseteq A\cap B$

$\Rightarrow$ f је РН на $A\cup B$

$\lrcorner$

$[0,5]$ и $[2,+\infty)$ РН $\Rightarrow$ $[0,+\infty)$ РН $\Rightarrow$ $(0,+\infty)$ РН

(2) $f(x)=\underbrace{x}+\underbrace{\sin x}$ РН на $\mathbb{R}$?

јесте РН

$|\sin\varphi| \le \varphi$

$$|\sin x-\sin y| = \left|2\cdot\sin\frac{x-y}{2}\cdot\underbrace{\cos\frac{x+y}{2}}_{\le 1}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le 2\cdot\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y| \Rightarrow \sin \text{ РН}$$

Збир 2 РН је РН!

$\ulcorner$ $h(x)=f(x)+g(x)$. $\varepsilon>0$ произвољно:

$$|h(x)-h(y)| = |f(x)-f(y)+g(x)-g(y)| \le |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|$$

f је РН: $(\exists\delta_1)\quad |x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$

g : $(\exists\delta_2)\quad |x-y|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$

важе оба

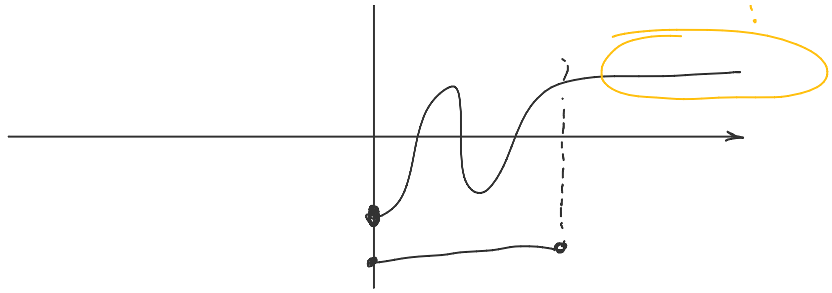
$$\Rightarrow \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}:\quad |x-y|<\delta \Rightarrow |h(x)-h(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \lrcorner$$

$\Rightarrow$ $x+\sin x$ је РН

(3) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, f непр.

③ $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, f непр.

$\boxed{\exists \lim_{x\to\infty} f(x) < +\infty}$



Доказати да је f РН.

$\alpha = \lim_{x\to\infty} f(x)$

$\iff$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists M>0)(\forall x>M)\ |f(x)-\alpha|<\varepsilon$ (*)

$$|f(x)-f(y)| = |(f(x)-\alpha) + (\alpha - f(y))| \le |f(x)-\alpha| + |\alpha - f(y)|$$

$\varepsilon>0$ произв. У (*) узмемо $\frac{\varepsilon}{2}$: $(\exists M)(\forall x>M)\ |f(x)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$

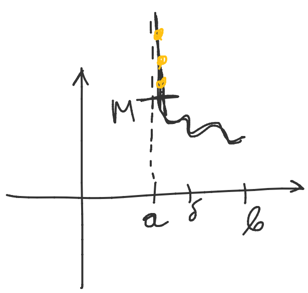
$(M,+\infty)$: $|f(x)-f(y)| \le \underbrace{|f(x)-\alpha|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(y)-\alpha|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

на скупу $[0,M]$: f је РН по Кантору.

$\Rightarrow$ f је РН на $[0,+\infty)$.

пр. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ је РН $[1,+\infty)$

④ f је непрекидна (a,b) и f је неограничена у некој околини тачке a. Показати да f није РН на (a,b).



$(\exists \delta>0)(\forall M>0)(\exists x_0 \in (a,a+\delta))\ |f(x_0)| > M$

$\to$ $(\exists x_n)$ $x_n \in (a, a+\frac{1}{n})$, x_n произвољан

$\to$? $(\exists y_n)$ $y_n \in (a,a+\frac{1}{n})$ тд. $|f(x_n) - f(y_n)| \ge 1$.

ППС

$\forall y \in (a, a+\frac{1}{n})$ важи $|f(x_n) - f(y)| < 1$

$\Rightarrow$ $-1 < f(x_n) - f(y) < 1$

$\Rightarrow$ $f(x_n) - 1 < f(y) < f(x_n)+1$

$\Rightarrow \quad -1 < f(x_n) - f(y) < 1$

$\Rightarrow f(x_n) - 1 < f(y) < f(x_n) + 1$

Тревиши од $\frac{1}{n} < \delta$ ово не може да важи, јер је f неогр.

$\rightarrow \quad x_n, y_n \in (a, b)$

$x_n, y_n \in (a, a+\frac{1}{n})$, $|f(x_n) - f(y_n)| \geq 1$

$a - a - \frac{1}{n} < x_n - y_n < (a + \frac{1}{n}) - a \Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{n}}_{0} < \underbrace{x_n - y_n}_{0} < \underbrace{\frac{1}{n}}_{0} \Rightarrow x_n - y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow |x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(ТО3Н)

$a < x_n < a + \frac{1}{n}$

$-a > -y > -a - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow f$ није РН.

⑤ $f(x) = \dfrac{x-2}{3x-4}$ РН?

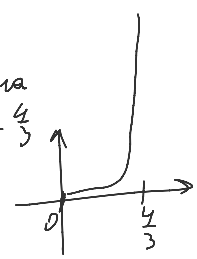
а) $[0, \frac{4}{3})$

б) $(-\infty, 0]$

а) $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}-} \dfrac{x-2}{3x-4} = +\infty \Rightarrow f$ неограничена у околини $\frac{4}{3}$

$3x - 4 \to 0-$

$x - 2 \to -\frac{2}{3}-$



$\Rightarrow$ није РН (из ④)

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-2}{3x-4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{3-\frac{4}{x}} = \dfrac{1}{3} < +\infty \Rightarrow f$ јесте РН (из ③)

⑥ Испитати РН:

а) $f(x) = x\sin x$ на $[0, +\infty)$

б) $f(x) = \sin(x^2)$ на $\mathbb{R}$

в) $f(x) = \sqrt{x}\cdot\log x$ на $(0,1)$

г) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ на $(0, \frac{1}{\pi}]$

г) $x_n, y_n \to 0$

$$x_n = \frac{1}{2n\pi}$$
$$y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\underbrace{\sin(2n\pi)}_{\sin 0 = 0} - \underbrace{\sin(2n\pi + \tfrac{\pi}{2})}_{\sin\frac{\pi}{2} = 1}| = |0-1| = 1 \not\to 0$$

$$x_n - y_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{\underbrace{2n\pi(2n\pi + \frac{\pi}{2})}_{\xrightarrow{n\to\infty} +\infty}} \to 0$$

$\Rightarrow$ није РН

б) $x_n = \sqrt{2n\pi}$

$y_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$

д) $x_n = 2n\pi$

$y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$

} домаћи !

в) $\lim\limits_{x\to 1-} \underbrace{x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\log x}_{\to 0} = 0$

$f(x) = x\log x$ је непрекидна

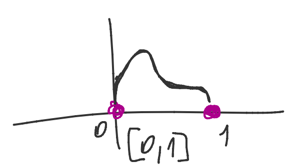
$\lim\limits_{x\to 0+} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\log x}_{\to -\infty} = 0$

пошто x „брже" тежи 0 него логаритам $-\infty$.

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, 1 \\ f(x), & x \in (0,1) \end{cases}$$

$\to$ ово g је додефинисано f тд остане непрекидно



g непр на $[0,1] \Rightarrow g$ је РН на $[0,1]$

(Кантор)

$\Rightarrow \underbrace{g|_{(0,1)}}_{f}$ РН $\Rightarrow f$ је РН на $(0,1)$.

За $k \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{C}$ тд. $|q| < 1$ важи

$$\lim_{n\to+\infty} (n^k q^n) = 0 \quad \dots (1)$$

$k = 1,\ q = e$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n \cdot \frac{1}{e^n}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^k \cdot q^x = 0 \qquad |q|<1$$

$$\lim_{x\to 0+} (\log x)^k \cdot x^n = 0 \qquad n\geq 1$$

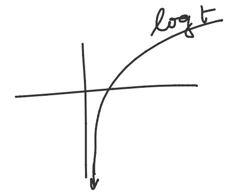
x, $[x]=n$

$n \leq x \leq n+1$

$e^n \leq e^x \leq e^{n+1}$

$$\frac{n+1}{e^n} \geq \frac{x}{e^x} \geq \frac{n}{e^{n+1}}$$

$$\underbrace{\frac{n}{e^n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{e^n}}_{\to 0} \geq \frac{x}{e^x} \geq \frac{1}{e}\cdot \underbrace{\frac{n}{e^n}}_{\to 0}$$



$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

смена: $x = -\log t$, $t\to 0+$, $x\to+\infty$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{-\log t}{e^{-\log t}} = \lim_{t\to 0+} \frac{-\log t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0+}(-t\log t)$$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{-\log t}{e^{-\log t}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{t\to 0+} t\cdot \log t = 0}$$

Основни лимеси

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$
- $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

(7) Најди лимеси:

а) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$

б) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(ax))}{\log(\cos(bx))}$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(mx)}{\mathrm{tg}(nx)}$

г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x^m-1}$

$$\text{д)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{2a}{x-a}}_{\to 0}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{2a}{x-a}}_{t\to 0}\right)^{\overbrace{\frac{x-a}{2a}}^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{2a}{x-a}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}$$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+\dots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\dots+b_1x+b_0} = \begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & n=m\\ \mathrm{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right)\infty, & n>m\\ 0, & m>n\end{cases}$$

$a_n, b_m \neq 0$

$$\text{б)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{\log(1+(\cos ax-1))}{\cos ax-1}}^{\to 1}}{\underbrace{\frac{\log(1+(\cos bx-1))}{\cos bx-1}}_{\to 1}}\cdot\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1} =$$

$\cos ax - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$\dfrac{\log(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{1-\cos ax}{(ax)^2}}^{\to\frac{1}{2}}}{\underbrace{\frac{1-\cos bx}{(bx)^2}}_{\to\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(ax)^2}{(bx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{a^2x^2}{b^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(nx)}{\mathrm{tg}(mx)} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{\sin(nx)}{nx}}^{\to 1}\cdot nx}{\underbrace{\frac{\sin(mx)}{\cos(mx)}\cdot\frac{mx}{mx}}_{\to 1}} = \lim_{x\to 0}\frac{nx}{mx} = \frac{n}{m}.$$

$$\text{г)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1} = \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^n-1}{(1+t)^m-1} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{(1+t)^n-1}{t}}{\frac{(1+t)^m-1}{t}} = \frac{n}{m}.$$

$t = x-1 \Rightarrow x = 1+t$

$x\to 1 \Rightarrow t\to 0$

$\dfrac{(1+t)^n-1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} n$

⑧ Најди лимеси:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x}$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin 3x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x + x\cos x}{\sin x \cos x}$

г) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2 - x + \sin x}{x + \cos x}$

д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctg\, x}{x}$

ѓ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\, x - \sin x}{\sin 3x}$

е) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{1-\cos x}$

ж) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$

з) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+3x}$

и) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+\alpha x)^p (1+\beta x)^q - 1}{x}$

ј) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$

к) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}\right)$

г) $$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2 - x + \sin x}{x + \cos x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = \frac{-1}{1} = -1.$$

$\frac{2}{x} \to 0$, $\frac{\sin x}{x} \to 0$, $\frac{\cos x}{x} \to 0$

$$0 \le \left|\frac{\cos x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \underset{x\to\pm\infty}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

$0 \le |\cos| \le 1$

д) $$\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctg\, x}{x} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{tg\, t} = \lim\limits_{t\to 0} \cos t \cdot \frac{t}{\sin t} = 1.$$

$x = tg\, t$

$x \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$\cos t \to 1$, $\frac{t}{\sin t} \to 1$

и) $$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+\alpha x)^p (1+\beta x)^q - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+\alpha x)^p \cdot \left((1+\beta x)^q - 1\right) + (1+\alpha x)^p - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+\beta x)^q - 1}{\beta x} \cdot \beta + \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+\alpha x)^p - 1}{\alpha x} \cdot \alpha$$

$(1+\alpha x)^p \to 1$

$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \to \alpha$

$$= q\beta + p\alpha.$$