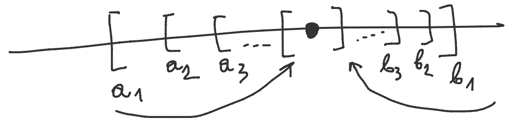
(КАН) (Канторова аксиома) За низ интервала $[a_n, b_n]$, $n\in\mathbb{N}$ важи $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$

Тада важи $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.



$\dots \subseteq [a_4, b_4] \subseteq [a_3, b_3] \subseteq [a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$

69. Показати да важи (СУП) ⇔ (АРХ) ∧ (КАН) где је (АРХ) ознака за Архимедову аксиому а (КАН) ознака за Канторову аксиоми (видети скрипту за потребне дефиниције).

(АРХ) $(\forall a>0)(\forall b\in\mathbb{R})(\exists n\in\mathbb{N})\ na>b$

$\Longleftrightarrow$

$\xrightarrow{\text{деф.}}$ $\mathbb{N}a$ није огр. одозго

- (СУП) ⇒ (АРХ)
- (СУП) ⇒ (КАН)
- (АРХ) ∧ (КАН) ⇒ (СУП)

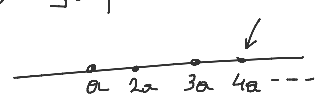
(скрипта, стр. 38-39)

$\boxed{1}$ (СУП) ⇒ (АРХ)

ппс Не важи (АРХ)

$(\exists a>0)(\exists b\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N})\ na\le b$.

$T = \mathbb{N}\cdot a = \{n\cdot a \mid n\in\mathbb{N}\}$ је огр. одозго
$T \neq \emptyset$
$\overset{(\text{СУП})}{\Longrightarrow}$ $\exists \sup T = c$.



$a>0 \Rightarrow c-a<c \Rightarrow c-a$ није ГО од T (јер је c најмање ГО)

$\Rightarrow (\exists n_0\in\mathbb{N})\ n_0\cdot a > c-a$

$\Downarrow$

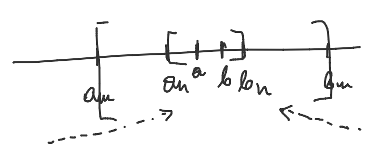
$\underbrace{a(n_0+1)}_{\in T} > c \Rightarrow c$ није ГО од T ↯ $\Rightarrow$ важи (АРХ)

$(c=\sup T)$

$\boxed{2}$ (СУП) ⇒ (КАН)

Нека су $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \subseteq \dots \subseteq [a_1, b_1]$ из (КАН). Хоћемо да им је пресек непразан.

$m<n$: $[a_n, b_n] \subseteq [a_m, b_m]$



$\Rightarrow a_m \le a_n \le b_n \le b_m$

$m=1$: $a_1 \le a_n \le b_n \le b_1$

$A=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, $B=\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

$a_n \le b_1 \Rightarrow A \le b_1 \Rightarrow b_1$ је ГО од A $\xRightarrow[(СУП)]{A\neq\emptyset}$ $\exists \sup A = a$.

$a_1 \le b_n \Rightarrow a_1 \le B \Rightarrow a_1$ је ДО од B $\xRightarrow[(СУП)]{B\neq\emptyset}$ $\exists \inf B = b$.

↳ важи исто за инфимум

Доказујемо $a_n \le a \le b \le b_n$.

$a_n \le a$ ✓

$b \le b_n$ ✓

доказаћемо $\boxed{b \ge a_n} \Rightarrow b$ је ГО за A $\xRightarrow{a=\sup A}$ $a \le b$.

a је најмање ГО

ппс $b < a_{n_0}$, $n_0\in\mathbb{N}$ неко

$\Rightarrow a_{n_0}$ није ДО од скупа B (ако би било ДО $\xRightarrow{b=\inf B}$ $b \ge a_{n_0}$ ↯)

јер је b највеће ДО

$\Downarrow$

$(\exists m_0\in\mathbb{N})\ b_{m_0} < a_{n_0}$

1° $m_0 < n_0$ $\quad b_{n_0} \le b_{m_0} < a_{n_0} \le b_{n_0}$ ↯

2° $m_0 = n_0$ $\quad a_{n_0} \le b_{n_0}$ ↯

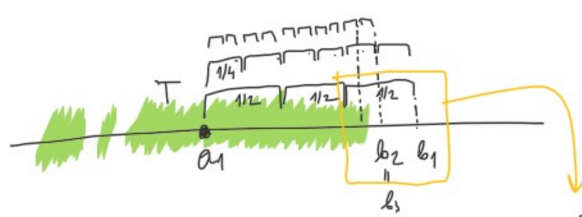
3° $m_0 > n_0$ $\quad b_{m_0} < a_{n_0} \le a_{m_0} \le b_{m_0}$ ↯

$\Rightarrow \boxed{b \ge a_n}$

3 (АРХ) $\wedge$ (КАН) $\Rightarrow$ (СУП)

T - непразан и одозго ограничен

$a_1 \in T$ - произв.



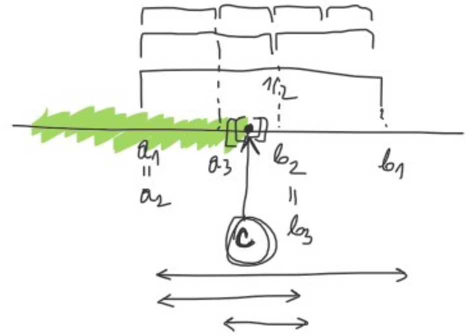
$m_1 = 3$

$m_2 = 5$, $m_3 = 10$

$b_3 = b_2$

$b_n = a_1 + m_n \cdot 2^{-n}$

m_n је најмањи пр. бр. тд. је b_n ГО скупа T



$n=1$: $\quad b_1 = a_1 + \frac{m_1}{2}$

$n=2$: $\quad b_2 = a_1 + \frac{m_2}{4}$

$n=3$: $\quad b_3 = a_1 + \frac{m_3}{8}$

$n=3, \quad b_3 = a_1 + \frac{m_3}{8}$

$n>1: \quad a_n = a_1 + (m_n - 1)\, 2^{-n}, \quad b_n - a_n = (a_1 + m_n \cdot 2^{-n}) - (a_1 + (m_n - 1)\, 2^{-n}) = \frac{1}{2^n}$

Сега добиваме низ интервали из (КАН): $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\overset{(КАН)}{\Longrightarrow} \exists c \in \underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]}_{\Pi} \neq \emptyset.$

$[a_n, b_n] \cap T \neq \emptyset, \ \forall n$

Важи: $m_{n+1} = \begin{cases} 2 \cdot m_n \\ 2 \cdot m_n - 1 \end{cases}$

$\to \Pi$ нема два елемента

$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$

ппс $\exists c, d \in \Pi$, узимемо n „довољно велико" т.д. $d - c > \frac{1}{2^n}$.
$(c<d$ БУО$)$

$c, d \in \Pi \Rightarrow c, d \in [a_n, b_n]$

$a_n \leq c < d \leq b_n$

$\Rightarrow d - c \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$ ↯

Бернулијева неједнакост: $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$

Зашто постоји? $2^n = (1+1)^n \geq 1 + 1 \cdot n = 1 + n \geq n$

$a=1$

ппс не постоји $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \frac{1}{2^n} \geq d - c$

$(d-c) \cdot 2^n \leq 1$

$\underbrace{(d-c) \cdot n}_{} \leq (d-c) \cdot 2^n \leq \underbrace{1}_{}$ ↯ (АРХ)

$\{(d-c) \cdot n\}$ огр.

$\Rightarrow \Pi$ садржи 1 елемент. Означимо га са c. Докажемо $c = \sup T$.

(завршити за формати — погледати скрипту)