Релација поретка: P+AC+T

$\leq$ релација поретка на A

$(A,\leq)$ - уређен скуп

Деф: Кажемо да је поредак на A тотални ако су свака његова два елемента упоредива, тј.

$(\forall x,y\in A)\ x\leq y \vee y\leq x$

Тада кажемо да је $(A,\leq)$ тотално (или потпуно) уређен скуп.

$\to (\mathbb{R},\leq)$ - тоталан

$\to (\mathbb{N},|)$ - није тоталан $\quad 3|7 \vee 7|3$

Интервали у $(A,\leq)$

$[a,\to)=\{x\in A \mid a\leq x\}=a^{\leq}$

$\to (a,\to)=\{x\in A \mid \underbrace{a<x}_{a\leq x \wedge a\neq x}\}=a^{<}$

$(\leftarrow,b]=\{x\in A \mid x\leq b\}=b^{\geq}$

$(\leftarrow,b)=\{x\in A \mid x<b\}=b^{>}$

$[a,b]=\{x\in A \mid a\leq x \wedge x\leq b\}=a^{\leq}\cap b^{\geq}$

$[a,b)=\{x\in A \mid a\leq x \wedge x<b\}=a^{\leq}\cap b^{>}$

$(a,b]=\{x\in A \mid a<x \wedge x\leq b\}=a^{<}\cap b^{\geq}$

$(a,b)=\{x\in A \mid a<x \wedge x<b\}=a^{<}\cap b^{>}$

$a,b\in\mathbb{N},\ a|b \Leftrightarrow (\exists c\in\mathbb{N})\, b=a\cdot c$

28. Посматрамо скуп природних бројева са релацијом поретка дели, $(\mathbb{N},|)$. Чему су једнаки скупови $[m,\to)$ и $(\leftarrow,m]$ за произвољно $m\in\mathbb{N}$?

$m\in\mathbb{N}$

$$\boxed{(A,\leq) \quad [a,\to)=\{x\in A \mid a\leq x\}=a^{\leq} \quad (\leftarrow,b]=\{x\in A \mid x\leq b\}=b^{\geq}}$$

$[m,\to)=\{n\in\mathbb{N} \mid m|n\}$

$=\{m,2m,3m,\dots\}$

↳ сви дељиви са m

$(\leftarrow,m]=\{n\in\mathbb{N} \mid n|m\}=$ сви делиоци од m

нпр. $(\leftarrow,10]=\{1,2,5,10\}$

29. Нека је A произвољан скуп и посматрамо $\mathcal{P}(A)$ са инклузијом као релацијом поретка, $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$. Чему су једнаки $(S,\to)$ и $(\leftarrow,S]$ где је S фиксиран подскуп скупа A?

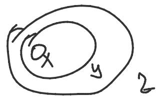
$(\mathcal{P}(A),\subseteq)$

↑ скуп ↑ релација

P) $X\subseteq X$ ✓

AC) $X\subseteq Y \wedge Y\subseteq X \Rightarrow X=Y$ ✓

T) $X\subseteq Y \wedge Y\subseteq Z \Rightarrow X\subseteq Z$ ✓



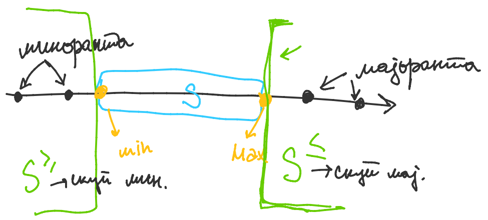
$(S,\to)=\{X\in\mathcal{P}(A) \mid S\subset X\}$ → скуп свих надскупова од S (не рачунајући S)

$(S\subset X \Leftrightarrow S\subseteq X \wedge S\neq X)$

$(\leftarrow,S]=?$

Деф: Нека је $(A,\leq)$ уређен скуп и $S\subseteq A$.

- s је МАЈОРАНТА (или горње ограничење) скупа S ако важи $S\leq s$. Скуп свих мајоранти скупа S означавамо са $S^{\leq}$. Кажемо да је скуп S ОГРАНИЧЕН ОДОЗГО ако је $S^{\leq}\neq\emptyset$ (тј. има бар једну мајоранту).
- s је МАКСИМУМ скупа S ако важи
  (i) $s\in S^{\leq}$ (тј. s је мајоранта)
  (ii) $s\in S$
  Односно $s=\max S \overset{def}{\Longleftrightarrow} s\in S\cap S^{\leq}$
- x је МИНОРАНТА (доње ограничење) ако је $x\leq S$. $S^{\geq}$ - скуп свих миноранти; $S^{\geq}\neq\emptyset$ - скуп огр. одоздо. $x=\min S \overset{def}{\Longleftrightarrow} x\in S\cap S^{\geq}$.



$(\forall x\in S)\, x\leq s \Leftrightarrow \underline{S\leq s} \Leftrightarrow s$ мајоранта

$s=\max S \Leftrightarrow s\in S\cap S^{\leq}$ → max не мора да постоји

Деф: Супремум скупа S у $(A,\leq)$ је (ако постоји) најмање горње ограничење, $\boxed{\sup S := \min S^{\leq}}$

Инфимум скупа S је (ако постоји) највеће доње ограничење, $\inf S := \max S^{\geq}$.

не мора да постоји

$\sup S=\min S^{\leq}$

30. Посматрамо скуп реалних бројева са уобичајеном релацијом мање или једнако, $(\mathbb{R},\leq)$. Дати су подскупови $S=(1,3)$ и $T=[4,+\infty)$. Одредити $S^{\geq}$, $S^{\leq}$, $T^{\geq}$, $T^{\leq}$, супремуме и инфимуме ових скупова ако постоје.

$4\leq T \Leftrightarrow (\forall t\in[4,+\infty))\, 4\leq t$

$S^{\geq}=\{x\in\mathbb{R} \mid \underbrace{x\leq S}_{(\forall s\in S)\, x\leq s}\}=(-\infty,1]$

$\uparrow$
$(1,3)$

$T^{\geq}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq T\}=(-\infty,4]$

$T^{\leq}=\{x\in\mathbb{R} \mid T\leq x\}=\emptyset$ → T није ограничен одозго

$S^{\leq}=\{x\in\mathbb{R} \mid S\leq x\}=[3,+\infty)$

$\longrightarrow \sup S=?$

$\longrightarrow \sup S = ?$

$\sup S = \min S^{\leq} = \min [3,+\infty)$ $\qquad (S^{\leq})^{\geq} = [3,+\infty)^{\geq} = (-\infty,3]$

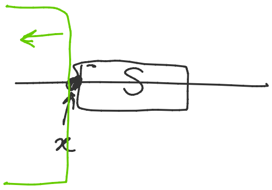
$x = \min[3,+\infty) \Leftrightarrow \underbrace{x \in [3,+\infty)}_{1^\circ} \wedge \underbrace{[3,+\infty)^{\geq}}_{2^\circ}$

$3 = \min ?$ $\quad 1^\circ\ 3 \in [3,+\infty)$

$2^\circ\ 3 \in (-\infty,3]$ $\quad \checkmark \quad \Rightarrow \boxed{\sup S = 3}$

Остало: $\underbrace{\inf S}_{=1}$, $\underbrace{\sup T}_{\times}$, $\underbrace{\inf T}_{=4}$

31. Дат је уређен скуп $(A,\leq)$ и непразан подскуп $S \subseteq A$. Нека постоји инфимум скупа S, $x = \inf S$. Показати да важи $S^{\geq} = \{x\}^{\geq}$.



$\underline{\exists x = \inf S}$ $\qquad S^{\geq} = \{x\}^{\geq}$

$\underline{x = \max S^{\geq}}$

$\downarrow$

$x \in S^{\geq} \wedge (S^{\geq})^{\leq}$ — нови скуп

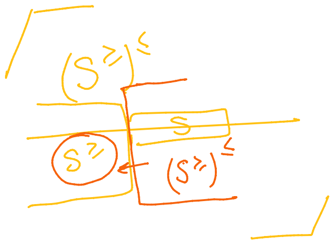
$\underline{s \in S^{\geq}} \Leftrightarrow (\forall y \in S)\ s \leq y$

$\underline{s \in \{x\}^{\geq}} \Leftrightarrow (\forall y \in \{x\})\ s \leq y \overset{(\Delta)}{\Leftrightarrow} \underline{s \leq x}$

$\uparrow$ $y = x$

$(\forall y \in S)\ s \leq y \overset{?}{\Leftrightarrow} s \leq x$

$\boxed{\Rightarrow}$ $x \in S^{\geq} \wedge (S^{\geq})^{\leq} \wedge \underline{(\forall y \in S)\ s \leq y} \overset{?}{\Rightarrow} s \leq x$



$s \in S^{\geq}$

$\left.x \in (S^{\geq})^{\leq} \Rightarrow (\forall y \in S^{\geq})\ y \leq x\right\} \Rightarrow s \leq x$

$y = s$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\underline{x \in S^{\geq}} \wedge (S^{\geq})^{\leq} \wedge s \leq x \overset{?}{\Rightarrow} (\forall y \in S)\ s \leq y$

$(s \in S^{\geq})$

$\underline{\text{ППС}}$ $\quad \underline{s \notin S^{\geq}} \Leftrightarrow \neg((\forall y \in S)\ s \leq y) \Leftrightarrow (\exists y \in S)\ \neg(s \leq y)$

$\Leftrightarrow (\exists y \in S)\ y < s \longrightarrow y \leq s \wedge y \neq s$

$y < s \leq x \underset{(T)}{\Rightarrow} \boxed{y < x} \leftarrow$ конкретно $y \in S$, $\underline{y < x}$

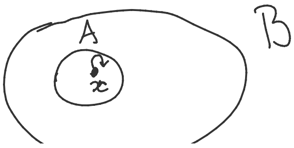
$x \in S^{\geq} \Leftrightarrow \underline{(\forall y \in S)\ x \leq y} \leftarrow (\forall y \in S)\ \underline{x \leq y}$ $\quad \lightning$

дигресија о утапању:

(4) Утапање скупа A у скуп B (важи $A \subseteq B$)

$j: A \to B$, $j(x) = x$ $\quad$ дијагонала

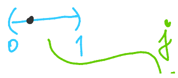
$\to j = (\Delta_A, A, B)$ где је $\Delta_A \subseteq A \times A \subseteq A \times B$

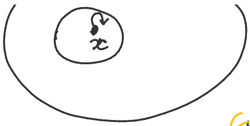


$j: A \to B$ $\qquad (j: A \hookrightarrow B)$ $\qquad$ нпр. $\underline{(0,1)} \hookrightarrow \mathbb{R}$

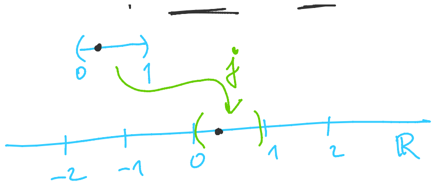
$j(x) = x$

$\in A \quad \in B$



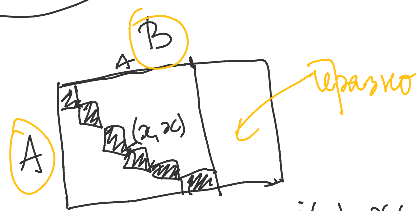


$j(x) = x$, $x \in A$, $x \in B$



$j = (\Delta_A, A, B)$

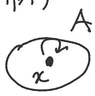
$j : A \to B$



$(x,x), x \in A$, $j(x) = x \in A \subseteq B$

(2) Идентичко пресликавање на A
$\mathbb{1}_A : A \to A$, $\mathbb{1}_A(x) = x$
$\mathbb{1}_A = (\Delta_A, A, A)$

⊛ $B = A$, $j = (\Delta_A, A, A)$ $\Big\}$ $j = \mathbb{1}_A$



⊛ $S = (1,4) \to$ шта је min? $\quad S^{\geq} = (-\infty, 1]$

$x = \min S \Leftrightarrow x \in S \cap S^{\geq} \Leftrightarrow x \in (1,4) \cap (-\infty, 1] = \emptyset \Rightarrow \min (1,4)$ НЕ ПОСТОЈИ

$(S^{\geq})^{\leq} = [1, +\infty)$ $\qquad \inf S = \max S^{\geq}$

$x = \max S^{\geq} \Leftrightarrow x \in S^{\geq} \cap (S^{\geq})^{\leq}$

$S^{\geq} = (-\infty, 1]$

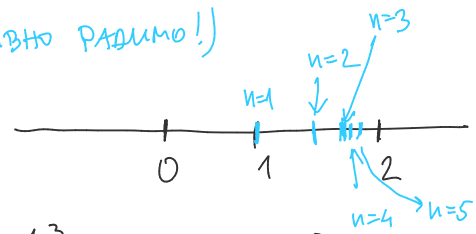
За вежбу:
$\sup S = 4$
$\nexists \max S$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cap [1, +\infty) = \{1\}$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 1}$ $\qquad 1 \notin (1,4) \to$ није min

⊛ $A = \{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq (\mathbb{R}, \leq)$ (ИНТУИТИВНО РАДИМО!)

$\sup A, \inf A, \max A, \min A$



$n=1: \ 2 - \frac{1}{1} = 1$

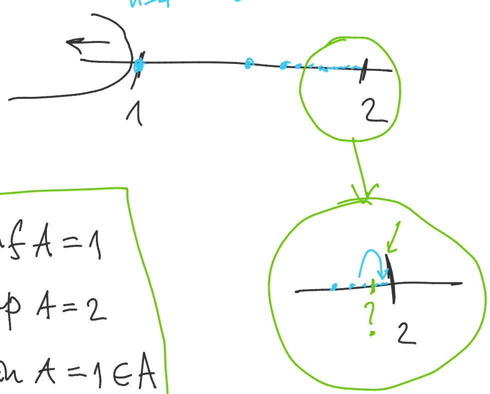
$n=2: \ 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

$n=3: \ 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$

$n=4: \ 2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$

$n=5: \ 2 - \frac{1}{5} = 1\frac{4}{5}$

$n \to \infty: \ 2 - \frac{1}{n} \to 2$



$A^{\geq} = (-\infty, 1]$, $\max A^{\geq} = 1$

$A^{\leq} = [(?), +\infty)$
< 2 ✗
↓ мора $= 2$

$A^{\leq} = [2, +\infty)$, $\min [2, +\infty) = 2$

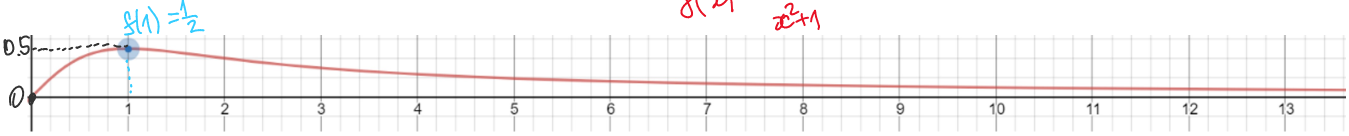
$\inf A = 1$
$\sup A = 2$
$\min A = 1 \in A$
$\nexists \max A$

$x = \max A \Leftrightarrow x \in A \cap A^{\leq} = A \cap [2, +\infty) = \emptyset$

(*) $A = \left\{ \underbrace{\frac{x}{x^2+1}} \,\middle|\, \underbrace{x > 0} \right\}$

$\sup A, \inf A, \max A, \min A$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$



$\inf A = 0$ $\qquad \frac{x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ($x > 0$ гледамо)

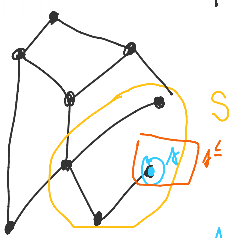
$\nexists \min A$ $\qquad \frac{x}{x^2+1} > 0$ ✓ , $\left[\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \right] \rightarrow$ у бесконачности идемо близу 0

$\sup A = \max A = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{x^2+1} \overset{?}{\leq} \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \leq x^2+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ ✓

$f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$ (зато је најмање могуће)

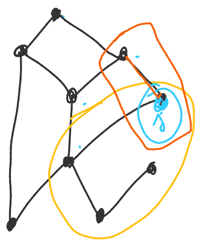
<u>Деф:</u>
- s је МАКСИМАЛАН елемент скупа S у $(A, \leq)$ ако важи $S \cap s^{\leq} = \{s\}$ (у скупу S нема већих елемената од s).
- s је МИНИМАЛАН елемент скупа S у $(A, \leq)$ ако важи $S \cap s^{\geq} = \{s\}$ (у S нема мањих елемената од s).

$S \cap \underbrace{s^{\leq}}_{\{x \in A \,|\, s \leq x\}} = \{s\}$



$\boxed{s^{\leq}} = \{x \in A \,|\, s \leq x\}$

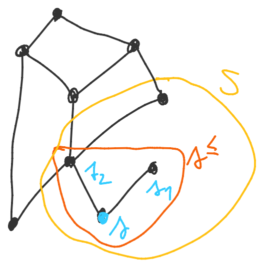
$s^{\leq} \cap S = \{s\}$ ✓



$\boxed{s^{\leq}} \cap S = \phi$

S ◇ $\cap$ ○ $= \{s\}$

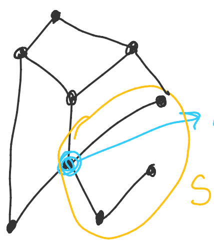
s јесте макс. ел. од S



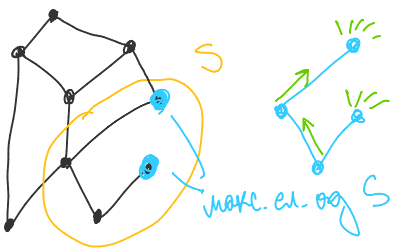
$s^{\leq} = \{x \in A \,|\, s \leq x\}$

$s^{\leq} \cap S = \{s, s_1, s_2\} \neq \{s\}$

није макс ел.



зашто није макс. ел. S ?



макс. ел. од S

33. Посматрамо скуп природних бројева са релацијом поретка дели, $(\mathbb{N}, |)$ и нека је дат скуп $S = \{2, 3, 4, ...\} = \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Да ли скуп S има минимум и максимум? Одредити минималне и максималне елементе скупа S.

$\boxed{S = \mathbb{N} \backslash \{1\}}$ • нема мајоранту $\rightarrow$ $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$

$n \,|\, 2n$ $\quad (n \leq 2n)$ и $2n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$

$\boxed{S = \mathbb{N} \setminus \{1\}}$ • нема мајоранту $\rightarrow$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$n \mid 2n \quad (n \leq 2n)$ и $2n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$\{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

$\Rightarrow$ нема максимума

• миноранта?

$x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$? $\quad x \mid S \quad , (\forall s \in S)\ x \mid s$

$$\left.\begin{array}{l} x \mid 2 \\ x \mid 3 \\ x \mid 4 \\ \vdots \end{array}\right\} \boxed{x = 1} \notin S$$

није минимум

$x = 1$ је једина миноранта

• максимални елементи?

s

$\{s\} = S \cap s^{\leq} = S \cap \{x \mid s \mid x\} = \{s, 2s, 3s, \ldots\}$

$x = 2s, 3s, \ldots \in S$

НЕМА!

• минимални елементи?

$\{s\} = S \cap s^{\geq} = S \cap \{x \mid x \mid s\}$

треба да буду делиоци са највише једним ел. у S

прости!

p – прост: $\quad S \cap p^{\geq} = \{2, 3, 4, \ldots\} \cap \{1, p\} = \{p\}$

$p^{\geq} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid p\} = \{1, p\}$

$\Rightarrow p$ је минимални елемент!

Скуп мин. ел. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$.