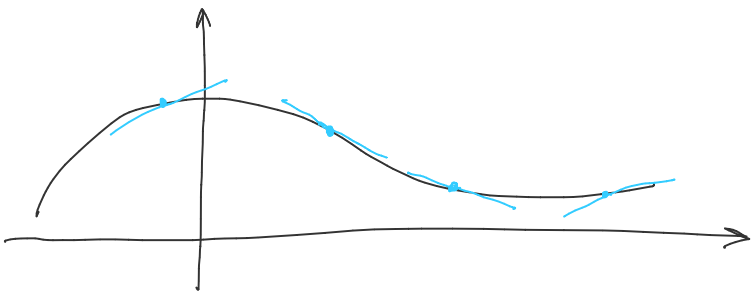
Диференцијабилност



$x(t) \to$ кретање

$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = v(t) \to$ брзина

$a(t) = v'(t) \to$ убрзање

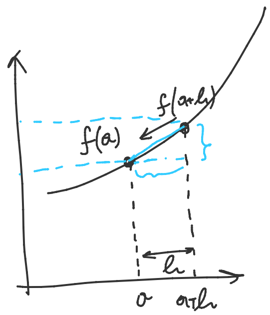
$\vdots$

f диференцијабилна у a $\iff$ f има извод у a

$$\iff \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

$$\Downarrow \quad x-a=h, \; x=a+h$$

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



пр. $f(x)=|x-1|$

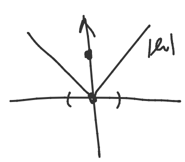
$f'(1)=?$

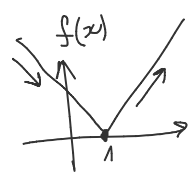
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|1+h-1| - |1-1|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0}\begin{cases} \frac{h}{h}=1, & h>0 \\ \frac{-h}{h}=-1, & h<0 \end{cases}$$

$f(1)=0$

$\nexists \lim_{h\to 0} \Rightarrow \nexists f'(1)$

$\Rightarrow f$ није диференц. у т. 1





Особине: (ако су f и g диф. у a)

$(f\pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ (извод је линеаран)

$(cf)'(a) = cf'(a)$

$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)$ (Лајбницово правило)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

$(f\circ g)'(a) = f'(g(a))\cdot g'(a)$

① Наћи изводе сл. ф-ја

① Наћи изводе сл. ф-ја

а) $f(x) = x^2 e^x \log x$

б) $g(x) = (\operatorname{arctg} x)^x$

в) $p(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & a \le x \le b \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$

а) $\underline{x>0}$

$(f_1 f_2 f_3)' = (f_1 f_2)' f_3 + f_1 f_2 f_3' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$

$f'(x) = 2x \cdot e^x \log x + x^2 e^x \log x + x^2 e^x \cdot \frac{1}{x}$

$(e^x)' = e^x$

$(\log x)' = \frac{1}{x}$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(a^x)' = (e^{\log a \cdot x})' =$

$= e^{\log a \cdot x} \cdot (\log a\, x)' =$

$= a^x \cdot \log a$

б) $(\operatorname{arctg} x)^x$, $\operatorname{arctg} x > 0$, $\underline{x>0}$

$\left((f_1(x))^{f_2(x)}\right)' \neq f_2(x) \cdot (f_1(x))^{f_2(x)-1} \cdot f_1'(x)$

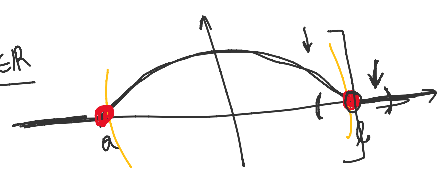
$g(x) = e^{\log(\operatorname{arctg} x) \cdot x}$

$g'(x) = e^{\log(\operatorname{arctg} x) \cdot x} \cdot (\log(\operatorname{arctg} x) \cdot x)' = (\operatorname{arctg} x)^x \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot x + \log(\operatorname{arctg} x) \cdot 1 \right)$

$= (\operatorname{arctg} x)^x \cdot \left(\frac{x}{1+x^2} \cdot \operatorname{arctg} x + \log(\operatorname{arctg} x) \right)$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

в) $\underline{x \in \mathbb{R}}$



[извод је локално својство]

[изводе гледамо на отвореним интервалима]

$x \in (a,b)$: $p(x) = (x-a)^2(x-b)^2$

$p'(x) = 2(x-a)(x-b)^2 + (x-a)^2 \cdot 2(x-b) = 2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$

$x<a$: $p(x) \equiv 0$

$x>b$: $p'(x) = 0$

$a+h \in [a,b]$

$x=a$: $p'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{p(a+h)-p(a)}{h} =$

$(a+h-a)^2(a+h-b)^2 - 0$ (a)

$f'_\pm(a) = \lim_{h \to 0^\pm} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\boxed{+}$ – десни извод

$\boxed{-}$ – леви извод

f диф $\Leftrightarrow \exists$ леви и десни

$x=a$: $\quad p'_+(a) = \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{\ldots}{h}$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{(\cancel{a}+h-\cancel{a})^{\cancel{2}}(a+h-b)^2 - \overset{\parallel}{0}}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \underbrace{h}_{\to 0}\cdot \underbrace{(a+h-b)^2}_{\to (a-b)^2} = 0$$

$$p'_-(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{p(a+h)-p(a)}{h} = \quad a+h<a$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$p'_-(a) = p'_+(a) \Rightarrow p'(a) = 0$$

$x=b$: доказати, слично као $x=a$

$\boxed{-}$ - леви извод

f диф $\Leftrightarrow$ $\exists$ леви и десни и једнаки су

пр. $f(x)=|x-1|$

$$\left.\begin{aligned} f'_+(1) &= 1 \\ f'_-(1) &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim f'(1)$$

② Испитати диференцијабилност $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$

↳ нађи такве домена где је f диф. и где није диф.

⊛ све елементарне ф-је су диф!

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

↳ диф на $x>0$

↳ деф. на $x\geq 0$

ово важи на $x>0$ иако је ф-ја деф. на $x\geq 0$

$$1-e^{-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \ \checkmark \qquad Dom(f) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-e^{-x^2}}}\cdot\left(1-e^{-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-e^{-x^2}}}\cdot\left(-e^{-x^2}\right)\cdot\underbrace{(-x^2)'}_{-2x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}\, e^{-x^2}\cdot x$$

диф. свуда осим у $x=0$ $\quad (1-e^{-0^2}=0)$ $\quad \Rightarrow$ f је диф. за $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$x=0$: $\quad \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1-e^{-h^2}}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1-e^{-h^2}}}{h} =$

$\nearrow \lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{\sqrt{1-e^{-h^2}}}{h} = 1$

$\searrow \lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{\sqrt{1-e^{-h^2}}}{h} = -1$

$$\left.\begin{aligned} f'_+(0) &= 1 \\ f'_-(0) &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$\Downarrow$

f није диф. у 0

$$\lim_{l\to 0}\frac{e^l-1}{l} = 1$$

$$l=-t^2:\quad \lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-t^2}}{t^2} = 1$$

$$\sqrt{t^2} = |t|$$

$\lim \dfrac{\sqrt{1-e^{-t^2}}}{\ldots} = 1 \Rightarrow \ldots \dfrac{\sqrt{1-e^{-t^2}}}{\ldots} = 1$

$h=t$: $\lim\limits_{t\to 0}$ $\quad t^2$

$$\lim_{t\to 0}\sqrt{\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}}=1 \Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1-e^{-t^2}}}{|t|}=1$$

③ $f(x)=\begin{cases} x\cdot|x|, & x\le 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$

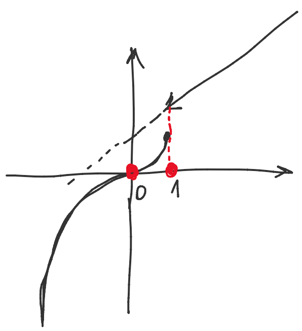
$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x<0\\ x^2, & 0\le x\le 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$$

$\boxed{\text{(*) } f \text{ диф. у } a \Rightarrow f \text{ непр. у } a}$

$\neg$ непр. $\Rightarrow$ $\neg$ диф.

f је диф. у тачкама скупа $\underbrace{(-\infty,0)}_{-2x}\cup\underbrace{(0,1)}_{2x}\cup\underbrace{(1,+\infty)}_{1}$.

$x=1$:



$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 1-} f(x)=1^2=1\\ &\lim_{x\to 1+} f(x)=1+1=2\end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ није непр. у } 1 \Rightarrow f \text{ није диф. у } 1$$

$x=0$: $f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0+} h=0$

$f'_-(0)=$ дом. $\_\_\_ =0$

$\Big\}\ f'(0)=0$

закључак: f је диф у т. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

④ $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac1x, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ је диф. на $\mathbb{R}$, али f' има прекид (у 0).

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(x^{-1})'=\left(\frac1x\right)'=-\frac1{x^2}$

$x\ne 0$: $f'(x)=2x\cdot\sin\frac1x+x^2\cdot\cos\frac1x\cdot\left(-\frac1{x^2}\right)=2x\cdot\sin\frac1x-\cos\frac1x$

$x=0$: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2\cdot\sin\frac1h-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0} h\cdot\sin\frac1h=0 \Rightarrow \exists f'(0)=0.$

$\left|h\cdot\sin\frac1h\right|\le|h| \;/\lim\limits_{h\to 0}$

$$\left|h\cdot\sin\frac{1}{h}\right| \le |h| \;/\lim_{h\to 0}$$

$$\lim\left|h\sin\frac{1}{h}\right| \le 0 \Rightarrow \lim h\cdot\sin\frac{1}{h} = 0.$$

f је диф. на $\mathbb{R}$.

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2x\cdot\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

прекид у $x=0$?

↓

да ли је $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$? хоћемо да не важи

$$\lim_{x\to 0}\left(2x\cdot\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) \quad \times$$

$x_n = \frac{1}{2n\pi}$ $\qquad g(x_n) = 0 - 1 = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

$y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ $\qquad g(y_n) = \frac{2}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\cdot 1 - 0 = \frac{2}{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Big\}\ \nexists \lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$\Rightarrow$ g има прекид у 0.

(5) $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & |x|\le 1 \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{4}, & |x|>1 \end{cases}$$

непр, диф.?

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & |x|\le 1 \\ \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{4}, & x>1 \\ -\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{4}, & x<1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{непр?}}$ — ван $\{-1,1\}$ → непр.

$x=-1$: $\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{-1-1}{4} = -\frac{\pi+2}{4}$

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ $\qquad \left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1\right)$

$\Big\}\ \neq \Rightarrow$ прекид у -1

$x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1-1}{4} = \frac{\pi}{4}$

$\Big\}\Rightarrow$ непр. у 1

$\boxed{\text{диф?}}$

проблеми (могућа) у -1 и 1

$x=-1 \Rightarrow$ није диф.

$x=1$: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$(\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4})$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\cancel{\frac{\pi}{4}} + \frac{h}{4} - \cancel{\frac{\pi}{4}}}{h} = \frac{1}{4} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\operatorname{arctg}(1+h) - \operatorname{arctg} 1}{h} = \lim_{y\to \frac{\pi}{4}-} \frac{y-\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} y - 1} = \lim_{u\to 0-} \frac{u}{\frac{2\operatorname{tg} u}{1-\operatorname{tg} u}} =$$

$$= \lim_{u\to 0-} \underbrace{\frac{u}{\operatorname{tg} u}}_{\to 1} \cdot \frac{1-\overbrace{\operatorname{tg} u}^{\to 0}}{2} = \frac{1}{2}$$

$f'_-(1) = \frac{1}{2}$

$\operatorname{arctg}(1+h) = y$

$h = \operatorname{tg} y - 1$

$y - \frac{\pi}{4} = u$

$\operatorname{tg}(y) = \operatorname{tg}(u+\frac{\pi}{4}) = \dfrac{\operatorname{tg} u + 1}{1 - 1\cdot \operatorname{tg} u} = \dfrac{\operatorname{tg} u + 1}{1 - \operatorname{tg} u}$

$\left[\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}\right]$

$\dfrac{\operatorname{tg} u + 1}{1-\operatorname{tg} u} - 1 = \dfrac{2\operatorname{tg} u}{1-\operatorname{tg} u}$

$f'_-(1) \neq f'_+(1) \Rightarrow f$ није диф. у 1