① $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}}_{a_n}$

$\left[\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right]$ ← ред 2. семестар детаљније

$a_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$

$a_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}$

$a_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4}$

$\vdots$

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \overset{\cdot k(k+1)}{\iff} 1 = (k+1) - k$ ✓

коначна сума до $n$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}_{n \text{ фиксно}} = \lim_{n\to\infty} \Big( \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{1}} - \tfrac{1}{2}}_{k=1} + \underbrace{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}}_{k=2} + \underbrace{\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}}_{k=3} \ldots + \underbrace{\tfrac{1}{n} - \boxed{\tfrac{1}{n+1}}}_{k=n} \Big) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}}_{=0} = 1$$

Предавања (доказ):
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0 \quad (q>1)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\vdots$

② $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$, $\quad \frac{1}{n} \to 0$

$$\frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2 - n^2}{\underbrace{\sqrt{n^2+n} + n}_{\text{збир} \to \infty}} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \overset{:n}{=} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

[домаћи: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+9} - \sqrt{n+8}\right)$]

③ $x_n$ конвергира. Да ли конвергирају:

а) $|x_n|$

б) $\frac{x_{n+1}}{x_n} \quad (x_n \neq 0)$

?


а) Да. $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon$ ← $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$

Док: $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |\alpha|$

проверити за домати (неједнакости △)

$$\big||x_n| - |\alpha|\big| \leq |x_n - \alpha| < \varepsilon$$

исто $n_0$

$$n \geq n_0 \Rightarrow \big||x_n| - |\alpha|\big| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = |\alpha|.$$

б) Не увек.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

$\alpha = 0$: нпр. $x_n = \frac{1}{n!} \to 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

$x_n = \frac{1}{n} \to 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

$\alpha \neq 0$: важните!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim x_{n+1}}{\lim x_n} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1.$$

④ **Домаћи:** Нека су $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^*_+$.
Показати

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

лема о 3 милиција!

$$\max\{a_1, \dots, a_m\} = M \; (= a_k)$$

$$M^n = a_k^n \leq a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n \leq \underbrace{a_k^n + \dots + a_k^n}_{m} = m \cdot M^n$$

$a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \quad M \leq \sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{m} \cdot M$$

$$M \qquad \qquad \lim (\sqrt[n]{m} \cdot M) = M$$

$$M \qquad \boxed{M} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{m}\cdot M\right) = M, \quad \sqrt[n]{m}\to 1$$

домаћи: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+3x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = f(x)$, $x>0$

(5) $f(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$. Да ли је $f$ непрекидна?

$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$

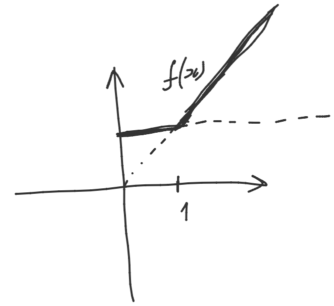
$x$ фиксно

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+x^n} = \boxed{\max\{1,x\} = f(x)}$$

јесте непр.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\le 1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1+} f(x)$$




(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+a+\dots+a^n}{1+b+\dots+b^n}$ $\qquad |a|,|b|<1$

$1+a+\dots+a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$, $a\neq 1$

$$= \frac{b-1}{a-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}-1}{b^{n+1}-1} = \frac{b-1}{a-1}\cdot\frac{0-1}{0-1} = \frac{b-1}{a-1}.$$

$$|a|<1 \Rightarrow a^n \longrightarrow 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases}0, & |a|<1\\ 1, & a=1\\ +\infty, & a>1\\ \nexists, & a\le -1\end{cases}$$

(7) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, $\quad a>0$ фиксно, $x_1>0$

Док: $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

монотон и ограничен низ!

$x_1>0 \Rightarrow x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)>0 \Rightarrow x_3>0 \dots$

индукција: $x_n>0$

$$x_n+\frac{a}{x_n} \geq 2\sqrt{a}$$

неједнакост између аритметичке и геометријске средине

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot\dots\cdot a_n}, \quad a_1,\dots,a_n>0$$

$$x_n+\frac{a}{x_n} \geq 2\cdot\sqrt{\cancel{x_n}\cdot\frac{a}{\cancel{x_n}}} = 2\sqrt{a}$$

$n=2$: $\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$ доказ

$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ ✓

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \geq \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a}=\sqrt{a}$$

$n\geq 2 \Rightarrow x_n \geq \sqrt{a}$ (ограничен одоздо)

Да ли $x_n$ опада?

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n}-x_n\right)=\frac{\overset{\leq 0}{a-x_n^2}}{2x_n} \leq 0 \Rightarrow x_{n+1}\leq x_n$$

$x_n \geq \sqrt{a}$

$\exists \lim_{n\to\infty} x_n=\alpha.$

$$\lim \Big| \; x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{a}{\alpha}\right) \Rightarrow 2\alpha=\alpha+\frac{a}{\alpha} \Rightarrow \alpha=\frac{a}{\alpha} \Rightarrow \alpha^2=a \Rightarrow \alpha=\sqrt{a}$$

$(\cancel{\alpha=-\sqrt{a}})$ јер $x_n>0$

⑧ а) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$

б) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$

в) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+2}$

доматн!

г) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\dots+a_1n+a_0}{b_mn^m+\dots+b_1n+b_0}=\begin{cases}\frac{a_k}{b_m}, & k=m\\ \infty, & k>m\\ 0, & k<m\end{cases}$$

$a_k, b_m \neq 0$

$a_k, b_m > 0$

г) $1^\infty$

$$\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\to 1 \qquad \frac{n^2+1}{n}\to\infty$$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n \to \infty} \to e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{-2n}{n^2+n+1}}_{\to 0}\right)^{\frac{n^2+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2n}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{-2n}\cdot\frac{-2n}{n^2+n+1}\cdot\frac{n^2+1}{n}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n^2+n+1}\cdot\frac{n^2+1}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-2(n^2+1)}{n^2+n+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

9) $a_1 = 1$

$a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$ Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n > 0$

$a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n} < \dfrac{1}{1+0} = 1$ $\Big\}$ $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n \le 1$

$a_n \in (0,1] \to$ ограничен

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{1+a_n} - a_n = \frac{1-a_n-a_n^2}{1+a_n} \quad \begin{matrix}\ge 0 ?\\ \le 0 ?\end{matrix}$$

не знамо монотоност $a_n$!

$\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ $\to$ највећа и најмања тачка нагомилавања низа

$\Big[\ \overline{\lim}\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\underline{\lim}\, x_n}$, $\underline{\lim}\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\overline{\lim}\, x_n}$, $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n$, $\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim}\, x_n\ \Big]$

- $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n \Rightarrow \exists \lim x_n$

$a_n \in (0,1] \Rightarrow \exists\, \overline{\lim}\, a_n = M$

$\exists\, \underline{\lim}\, a_n = m$

$$M = \overline{\lim}\, a_{n+1} = \overline{\lim}\frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{\underline{\lim}(1+a_n)} = \frac{1}{1+\underline{\lim}\, a_n} = \frac{1}{1+m}$$

$$m = \underline{\lim}\, a_{n+1} = \underline{\lim}\frac{1}{1+a_n} = \dots = \frac{1}{1+M}$$

$\frac{\quad}{1+a_n} \qquad \frac{\quad}{1+M}$

$M + mM = 1 \quad \wedge \quad m + mM = 1 \overset{\text{одузмемо}}{\Longrightarrow} m = M \Rightarrow \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, M \Rightarrow \exists \lim a_n = \alpha$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \alpha = \frac{1}{1+\alpha} \Rightarrow \alpha + \alpha^2 = 1 \longrightarrow \alpha > 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(10) $(x_{2n}), (x_{3n}), (x_{4n}), \ldots$ конвергирају ка истом броју. Да ли $x_n$ конвергира?

$x_2, x_4, x_6, x_8, \ldots \to \alpha$

$x_3, x_6, x_9, \ldots \to \alpha$

$x_4, x_8, x_{12}, \ldots \to \alpha$

$\vdots$

$\Bigg\} \; x_n \to ?$

НЕ!

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ сложен} \\ n, & n \text{ прост} \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

$1, 2, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 0, 0, 11, 0, 13, \ldots$

$(\alpha = 0)$

## Равномерна непрекидност

$f: X \to \mathbb{R}$

$A \subseteq X$

δ ће бити исто за све $x, y \in A$

↳ равномерно (униформно)

$f$ је РН $\boxed{\text{на } A}$ $\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in A)\; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

на скупу!

↳ пре навођења тачака

Канторова Т: $f$ непр. на $[a, b] \Rightarrow f$ је РН на $[a, b]$.

↳ битно да је затворен

(1) $f(x) = x$ РН на $\mathbb{R}$?

узмемо $\delta = \varepsilon$.

$\varepsilon > 0$ произв. $\delta = \varepsilon$ $\qquad (\forall x, y \in \mathbb{R})\; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$|x - y| < \varepsilon \Rightarrow |x - y| < \varepsilon$ ✓

(2) $f(x) = x^2$

а) РН на $[0,1]$

б) није РН на $\mathbb{R}$

в) РН на $(0,1)$

а) $f$ - непр. $\Rightarrow$ (Кантор) РН на $[0,1]$

Како доказујемо да није РН?

$$\left.\begin{array}{l} x_n, y_n \in A \\ |x_n - y_n| \to 0,\ n\to\infty \\ |f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0,\ n\to\infty \end{array}\right\} \text{није РН}$$

б) $x_n = \sqrt{n+1} \in \mathbb{R}$

$y_n = \sqrt{n} \in \mathbb{R}$

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2| = |n+1-n| = |1| = 1 \not\to 0$$

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}_{\to\infty}} \to 0$$

$\Rightarrow$ $f$ није РН на $\mathbb{R}$

није РН на $[50, +\infty)$

$(10^{10}, +\infty)$ итд.

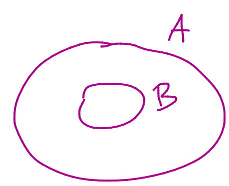
в) $(0,1) \subseteq [0,1]$

отворен, па не може директно Кантор

а) $\Rightarrow f$ РН на $[0,1]$ $\Rightarrow$ $f$ је РН на $(0,1)$

$f$ је РН на $A$ и $B \subseteq A$

$\Rightarrow f$ је РН на $B$




важи $\forall x, y \in A$ $\Rightarrow$ важи $\forall x, y \in B$