Понедељак 23.11.2020.

Деф: **Поље** је петорка $(E, +, \cdot, 0, 1)$ за коју важи:

$\mathbb{Z}$ није поље

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ✓

$\forall x, y, z \in E$

(1) $(E, +, 0)$ је Абелова група

(2) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(3) $x \cdot y = y \cdot x$

(4) $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

(5) $(\forall x \neq 0)(\exists y \in E)\ x \cdot y = y \cdot x = 1$

$y = x^{-1}$ (инверз од x у односу на операцију $\cdot$)

(6) $0 \neq 1$

63. Нека је $(E, +, \cdot, 0, 1)$ поље. Показати да за све $x, y \in E$ важи $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ и $(-x) \cdot (-y) = xy$.

$$x \cdot (\underbrace{y + (-y)}_{0}) = x \cdot 0 = 0$$

дистрибутивност

$$x \cdot y + x \cdot (-y) = 0 \quad \Rightarrow \quad -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$$

слично: $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ $\rightarrow$ посматрати $(x + (-x)) \cdot y$

$$-(x \cdot y) = x \cdot (-y) \leftarrow \boxed{x \rightsquigarrow -x}$$

$$-(\underbrace{(-x) \cdot y}) = (-x) \cdot (-y)$$

$$-(-(x \cdot y)) = (-x) \cdot (-y)$$

$$x \cdot y = (-x) \cdot (-y) \quad ✓$$

64. Показати да у произвољном пољу $(E, +, \cdot, 0, 1)$ важи биномна формула

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

за све $x, y \in E$ и $\underline{n \in \mathbb{N}_0}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \quad 0 \le k \le n$$

$$0! = 1$$

$$\binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$$

индукцијом по n:

1) БАЗА: $n=1$

$$\underset{\substack{\| \\ x+y}}{(x+y)^1} = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k \cdot y^{1-k} = \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{\binom{1}{0} \cdot x^0 \cdot y^1} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=1}}{\binom{1}{1} \cdot x^1 \cdot y^0} = y + x \quad \checkmark$$

$n=0$

$$\underset{\substack{\| \\ 1}}{(x+y)^0} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 \cdot y^0 = 1 \quad \checkmark$$

2) хип. пт. за n:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

3) корак: доказујемо за n+1:

мењамо индекс: $k+1 = j \Rightarrow k = j-1$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) \cdot (x+y) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} =$$

$j=n+1$: $\binom{n}{n} x^{n+1} = x^{n+1}$

$j=k \rightarrow$ преименујемо

$k=0$: $\binom{n}{0} y^{n+1} = y^{n+1}$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \boxed{x^j \cdot y^{n-j+1}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \boxed{x^k y^{n-k+1}} =$$

$$= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} =$$

$$= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n-k+1} =$$

$$= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} \quad \checkmark$$

$x^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot y^0 \rightarrow k = n+1$

$y^{n+1} = \binom{n+1}{0} \cdot y^{n+1} \cdot x^0 \rightarrow k = 0$

$$y^{n+1} = \binom{n+1}{0} \cdot y^{n+1} \cdot x^{0} \to k=0$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right)}_{\frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \frac{n+1}{k(n-k+1)}} = \frac{(n+1)\cdot n!}{k(n-k+1)(k-1)!\,(n-k)!} =$$

$(n-k+1)! = (n-k+1)\cdot(n-k)!$

$k! = k\cdot(k-1)!$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,.\,(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$$

65. Нека је $(E, +, \cdot, 0, 1)$ поље. Показати да је за $a \neq 0$ хомотетија χ_a аутоморфизам структуре $(E, +)$.

$\chi_a : E \to E$

$\chi_a = x \cdot a$

аутоморфизам $\Leftrightarrow$ морфизам у себе + бијекција

↳ предавање

(i) (2) $\Rightarrow \chi_a(x+y) = \chi_a(x) + \chi_a(y)$

$\chi_a : (E,+) \to (E,+)$

χ_a видим као морфизам Абелове групе $(E,+)$ у себе, тј. ендоморфизам (морфизам у себе)

End$(E,+)$ - скуп ендоморфизама

$\chi_a \in \mathrm{End}(E,+)$

(ii) $\chi_a(0) = 0$

$a\cdot(0+0) = \cancel{a\cdot 0} + a\cdot 0 \Rightarrow a\cdot 0 = 0$

доћи само: $\chi_a(-x) = -\chi_a(x)$?

$\chi_a(-x) = a\cdot(-x) = -a\cdot x = -\chi_a(x)$

бијекција: 1-1 $\quad \chi_a(x) = \chi_a(y)$

$a\cdot x = a\cdot y$

$a\cdot(x-y) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{a=0}_{\times} \lor x-y=0$

$\Downarrow$

$x=y$ ✓

У пољу: $u\cdot v = 0 \Rightarrow u=0 \lor v=0$

$(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ није поље . $2\cdot 3 = 6 = 0$, $2\neq 0, 3\neq 0$

на $(\forall y\in E)(\exists x\in E)\ \chi_a(x) = y$?

$a\cdot x = y$

узмемо: $x = \underbrace{a^{-1}}\cdot y$

↳ $\exists a^{-1}$ јер $a \neq 0$ (5)

$\Rightarrow \chi_a(x) = a\cdot x = a\cdot(a^{-1}\cdot y) \overset{(2)}{=} \underbrace{(a\cdot a^{-1})}_{1}\cdot y = y$ ✓

66. Нека је $(E,+,\cdot,\leq,0,1)$ тотално уређено поље. Показати да за све $x,y\in E$ важи $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

за деф $|\cdot|$

Деф. Уређено поље је шесторка $(E,+,\cdot,\leq,0,1)$ за коју важи

(1) $(E,+,\cdot,0,1)$ је поље

(2) $(E,+,\leq,0)$ је уређена Абелова група (тј. $\leq$ је сагласно са $+$) (не мора $\leq$ да буде рел. тоталног уређења) — слагање са $+$

(3) Ако је $a\in E$ и $\underline{a>0}$ онда је $\chi_a\in \mathrm{Aut}(E,+,\leq,0)$ тј. $\underline{x\leq y}\Rightarrow \underline{a\cdot x\leq a\cdot y}$. Другим речима, захтевано сагласност оп. $\cdot$ и рел. $\leq$. — слагање са $\cdot$

$$|x|=\max\{-x,x\}$$

$$|0|=\max\{0,-0\}=\max\{0,0\}=0$$

1° $x=0$: $|0\,y|=|0|\cdot|y|$

$|0|=0\cdot|y|$

$0=0\cdot|y|$ ✓

2° $y=0$: ... ✓

3° $x,y\neq 0$

3.1° $x,y>0$

$-x,-y<0$ $\qquad -x<0<\underline{x}$, $\quad -y<0<\underline{y}$

$|x|=\max\{\underline{x},-x\}=x$

$|y|=y$

$$xy=|x\cdot y|\overset{?}{=}\underbrace{|x|}\cdot\underbrace{|y|}=x\cdot y \quad ✓$$

$x>0\ /\cdot y$

$\underline{xy}>0\cdot y=0\Rightarrow |xy|=xy$

3.2° $x>0,\ y<0$

$-x<0\Rightarrow |x|=\underline{x}$

$-y>0\Rightarrow |y|=\underline{-y}$ $\qquad (y<0<\underline{-y})$

$y<0\ /\cdot x\ (x>0)$

$xy<0\cdot x=0\Rightarrow |xy|=-xy$

$(xy<0<-xy)$

$$-xy=|xy|,\quad -xy = x\cdot(-y) = |x|\cdot|y|$$

3.3° слично

3.4° $x,y<0$

$x\rightsquigarrow \underline{-x}>0$, $\quad y\rightsquigarrow \underline{-y}>0$ $\overset{3.1^\circ}{\Rightarrow}$ $|-x|\cdot|-y|=|\underbrace{(-x)\cdot(-y)}_{xy}|=|xy|$ ✓

$|-x|\cdot|-y| = |x|\cdot|y|$

$$|-x|=\max\{-x,-(-x)\}=\max\{-x,x\}=|x|$$

Радимо у $\mathbb{R}$: (скрипта стр. 19-20)

Подсећање: (суп) Сваки одозго ограничен скуп $S\subseteq\mathbb{R}$ има супремум $\sup S\in\mathbb{R}$.

Подсећање: (СУП) Сваки одозго ограничен непразан скуп $S\subseteq\mathbb{R}$ има супремум $\sup S\in\mathbb{R}$.
↳ најмање горње ограничење

(ДЕД) Нека су $D_1,D_2\subseteq\mathbb{R}$ такви да важи:

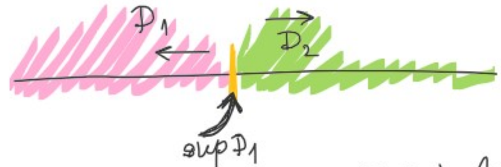
Дедекиндова аксиома

Д1) $D_1\cup D_2=\mathbb{R}$

Д2) $D_1,D_2\neq\emptyset$

Д3) $\delta_1\in D_1\wedge\delta_2\in D_2\Rightarrow\delta_1<\delta_2$, $(D_1\cap D_2=\emptyset)$

Онда постоји најмање горње ограничење $\sup D_1\in\mathbb{R}$ скупа D_1.



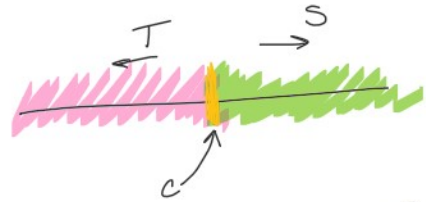
(D_1,D_2) - Дедекиндов пресек

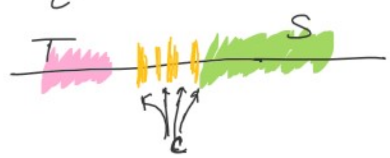
(НЕП) Нека су $S,T\subseteq\mathbb{R}$ непразни за које важи

аксиома непрекидности

$$(\forall t\in T)(\forall s\in S)\ t\le s.$$

Тада постоји $c\in\mathbb{R}$ тд. $(\forall t\in T)(\forall s\in S)\ \underline{t\le c\le s}$.





68. Показати да је аксиома (СУП) еквивалентна Дедекиндовој аксиоми (ДЕД) и аксиоми непрекидности (НЕП) (видети скрипту за потребне дефиниције).

(СУП) ⇔ (ДЕД) ⇔ (НЕП)

⊗ С ⇔ Д, Д ⇔ Н ✓ → $\boxed{4 \Rightarrow}$

⊛ С ⇒ Д, Д ⇒ Н, Н ⇒ С ✓ → $\boxed{3 \Rightarrow}$

$\boxed{1}$ (СУП) ⇒ (ДЕД)

Нека су D_1 и D_2 из (ДЕД). Хоћемо да докажемо да $\exists\sup D_1$, знајући да важи (СУП).

(СУП): одозго огр. и $\neq\emptyset$ ⇒ ∃sup

Питање: да ли је D_1 одозго огр и непразан?

Д2) ⇒ $D_1\neq\emptyset$ ✓

Д2) ⇒ $D_2\neq\emptyset$ ⇒ $\exists d_2\in D_2$

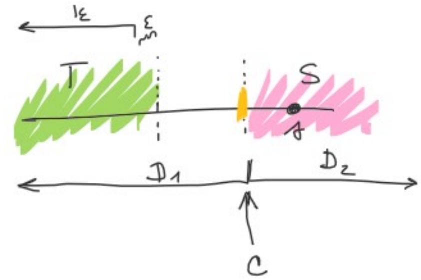
Д3) ⇒ $(\forall d_1\in D_1)\ d_1<d_2$ } ⇒ d_2 је го за D_1

⇒ $\exists\sup D_1$ ✓

$\boxed{2}$ (ДЕД) ⇒ (НЕП)

S,T - из деф (НЕП) ⇒ $(\forall s\in S)(\forall t\in T)\ t\le s$. Хоћемо $\exists c\in\mathbb{R}$, $t\le c\le s$.

S, T – из деф (НЕП) $\Rightarrow (\forall s\in S)(\forall t\in T)\ t\le s$. Хоћемо $\exists c\in\mathbb{R}$, $t\le c\le s$.



$D_1=\{x\in\mathbb{R} \mid (\forall s\in S)\ x<s\}$

$D_2=\mathbb{R}\setminus D_1$

Д1) $D_1\cup D_2 = D_1\cup(\mathbb{R}\setminus D_1) = D_1\cup D_1^c = \mathbb{R}$ ✓

Д2) $S\subseteq D_2$

$\underbrace{T_\varepsilon = T-\varepsilon}$ $=\{t-\varepsilon \mid t\in T\}$, $\varepsilon>0$

$T_\varepsilon\subseteq D_1$

$D_1, D_2 \neq \emptyset$, јер $S\neq\emptyset$ и $T_\varepsilon\neq\emptyset$ ✓

Д3) $\left.\begin{array}{l}\delta_1\in D_1\\ \delta_2\in D_2\end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \delta_1<\delta_2$

$(\forall s\in S)\ \delta_1<s$

ппс $\neg(\delta_1<\delta_2) \Rightarrow \delta_1\ge\delta_2$

$\Rightarrow s>\delta_1\ge\delta_2 \Rightarrow s>\delta_2$, $\forall s\in S$

деф $D_1 \Rightarrow \delta_2\in D_1$

$\left.\begin{array}{l}\delta_2\in D_1\\ \delta_2\in D_2=D_1^c\end{array}\right\}$ ↯ $\Rightarrow \boxed{\delta_1<\delta_2}$

$\Rightarrow$ по (ДЕД) следи да $\exists \sup D_1 = c$. (Немамо да нам ово даје c из (НЕП)).

$T_\varepsilon\subseteq D_1 \Rightarrow t-\varepsilon\le c$, $\forall t\in T$, $\forall\varepsilon>0$ (јер је c го од D_1)

→ Доказујемо да је $t\le c\ (\forall t\in T)$,

ппс $(\exists t_0\in T)$ $t_0>c$

узмемо $\varepsilon_0=\frac{1}{2}(t_0-c)>0$

$t_0-\varepsilon_0 = t_0-\frac{1}{2}(t_0-c) = \frac{1}{2}(\underset{>c}{t_0}+c) > \frac{c+c}{2} = c$.

$\left.\begin{array}{l}t-\varepsilon\le c\\ t_0-\varepsilon_0>c\end{array}\right\}$ ↯

$\Rightarrow \boxed{t\le c\ (\forall t\in T)}$ (*)

Још треба: $c\le s$, $s\in S$

$s\in S$ произвољно.

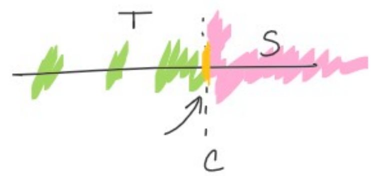
$\left.\begin{array}{l}\text{деф } D_1 \Rightarrow \delta_1<s\ (\forall\delta_1\in D_1) \Rightarrow s \text{ го од } D_1\\ c=\sup D_1 \Rightarrow c \text{ је најмање го}\end{array}\right\}$ $c\le s$ (*)

↑ јер је c најмање

$(\forall t\in T)(\forall s\in S) \quad t \overset{(*)}{\le} c \overset{(*)}{\le} s.$

$\boxed{3}$ (НЕП) $\Rightarrow$ (СУП)

T - непразан и огр. одозго. Да ли $\exists \sup T$?



$S = T^{\le} \to$ скуп свих ГО од T

$S \neq \phi, T \neq \phi$ јер је T огр.

$s\in S \Rightarrow s \in T^{\le} \Rightarrow (\forall t \in T)\ s \geq t\ (\forall s\in S) \Rightarrow S$ и T зад. (НЕП) $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$

$(\forall t\in T)(\forall s\in S)\ t \overset{(*)}{\le} c \overset{(*)}{\le} s.$

$(\forall t\in T)\ t \le c$

$(\forall s\in S = T^{\le})\ c \le s$

Хоћемо $c = \sup T$:

1) c је ГО од T из $(*)$ ✓

2) $c \in T^{\le}$ и $(*) \Rightarrow c$ је најмање ГО ✓

$\Rightarrow$ (СУП)