Петак 23.10.2020.

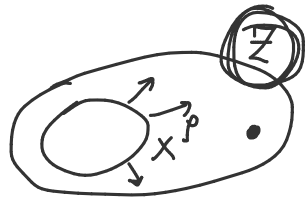
23. Доказати да је скуп X^ρ највећи (у односу на релацију $\subseteq$) скуп $Y \subseteq B$ са особином $X\rho Y$.

Ако узмемо све скупове Y за које важи $X\rho Y$, највећи $(\subseteq)$ међу њима ће бити $Y = X^\rho$.

1° $X\rho X^\rho$?

$X^\rho = \{ b \in B \mid X\rho\{b\} \}$

$X\rho X^\rho \Leftrightarrow (\forall x_1 \in X)(\underbrace{\forall x_2 \in X^\rho}_{x_2 \in B \,\wedge\, \underbrace{X\rho x_2}_{(\forall x_1 \in X)\, x_1 \rho x_2}})\ x_1 \rho x_2$ ✓



2° Шта значи највећи (у смислу $\subseteq$)?

Ако узмемо неки други Z: Z задовољава $X\rho Z$ и $X^\rho \subseteq Z \Rightarrow X^\rho = Z$.

$\boxed{\text{ППС}}$ (претпоставимо супротно)

$\neg(X^\rho = Z) \Leftrightarrow X^\rho \neq Z \Leftrightarrow \exists z_0 \in Z \setminus X^\rho$

$\exists z_0 \in Z,\ z_0 \notin X^\rho$

$\hookrightarrow \neg(z_0 \in X^\rho) \Leftrightarrow \neg(\forall x \in X)\, x \rho z_0$

$\Leftrightarrow \boxed{(\exists x_0 \in X)\, \neg(x_0 \rho z_0)}$

израз τ

$X\rho Z \Leftrightarrow \boxed{(\forall x \in X)(\forall z \in Z)\, x\rho z}$

$\boxed{(\exists z_0 \in Z)(\exists x_0 \in X)\, \neg(x_0 \rho z_0)}$

$\neg\tau$

$\neg\tau : \neg(\forall x \in X)(\forall z \in Z)\, x\rho z$

$\Leftrightarrow \boxed{(\exists x \in X)(\exists z \in Z)\, \neg(x\rho z)}$

Тачно је и τ и $\neg\tau$ ↯ (контрадикција)

$\Rightarrow$ ППС није тачно

$\Rightarrow$ задатак је тачан

24. Нека је ρ бинарна релација на $A \times B$. Показати да за све скупове $X \subseteq A$ и $Y \subseteq B$ важи

$$X\rho Y \Leftrightarrow Y\rho^{-1}X.$$

$\rho \longleftrightarrow \Gamma$

$\rho^{-1} \longleftrightarrow \Gamma^{-1}$, $\boxed{y\rho^{-1}x \Leftrightarrow x\rho y}$ деф. ρ^{-1}

$X\rho Y \Leftrightarrow (\forall x \in X)(\forall y \in Y)\, x\rho y \Leftrightarrow (\forall x \in X)(\forall y \in Y)\, y\rho^{-1}x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y)(\forall x \in X)\, y\rho^{-1}x$

$\Leftrightarrow y \rho^{-1} x$

• ρ бинарна релација на $A \times A$ ⟿ график Γ $\quad [\rho = \sim]$

(P) $-\rho$ рефлексивна: $\Delta_A \subseteq \Gamma$ $\quad ((\forall a \in A)(a,a) \in \Gamma) \to a \rho a$

(C) $-\rho$ симетрична: $\Gamma^{-1} = \Gamma$ $\quad (a \rho b \Leftrightarrow b \rho a)$

(T) $-\rho$ транзитивна: $\Gamma \circ \Gamma \subseteq \Gamma$ $\quad ((a,b) \in \Gamma \wedge (b,c) \in \Gamma \Rightarrow (a,c) \in \Gamma)$

(AC) $-\rho$ антисиметрична: $\Gamma \cap \Gamma^{-1} \subseteq \Delta_A$ $\quad (a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b)$

Релација еквиваленције: P + C + T

Деф: Класа еквиваленције елемента $a \in A$ је скуп $\tilde{a}$

$\tilde{a} = \Gamma(a) = \{x \in A \mid a \sim x\}$

Количнички скуп $A/\sim$ (или A/Γ) $\to A/\rho$ је скуп

$A/\sim = \{\tilde{a} \mid a \in A\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

↳ скуп класа еквиваленције од $\sim$

$\equiv_7 \to$ конгруенција по модулу 7

$17 \equiv_7 10 \equiv_7 3$

25. Нека је на скупу природних бројева $\mathbb{N}$ дата релација $\equiv_7$ коју дефинишемо условом

$$\boxed{n \equiv_7 m \Leftrightarrow 7 \mid n - m.}$$

Показати да $\equiv_7$ дефинише релацију еквиваленције на скупу природних бројева. Одредити класе еквиваленције елемената $1, 8, 9, 13 \in \mathbb{N}$. Чему је једнак количнички скуп $\mathbb{N}/\equiv_7$?

Рел еквив?

P: $n \equiv_7 n$? $\Leftrightarrow 7 \mid n-n \Leftrightarrow 7 \mid 0$ ✓

C: $n \equiv_7 m \overset{?}{\Leftrightarrow} m \equiv_7 n$

$n \equiv_7 m \Leftrightarrow 7 \mid n-m \Leftrightarrow 7 \mid m-n \Leftrightarrow m \equiv_7 n$

T: $n \equiv_7 m \wedge m \equiv_7 p \overset{?}{\Rightarrow} n \equiv_7 p$?

$7 \mid n-m \qquad 7 \mid m-p$

$\left.\begin{array}{l} n-m = 7 \cdot k_1, \ k_1 \in \mathbb{Z} \\ m-p = 7k_2, \ k_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} + \Rightarrow \underbrace{(n-m) + (m-p)}_{n-p} = 7k_1 + 7k_2 = 7(k_1 + k_2)$

$\Rightarrow 7 \mid n-p$ ✓

$A = \mathbb{N}$

Класе од 1, 9, 8, 13 ?

Класе од 1, 9, 8, 13 ?

$$a^{\sim} = \{x\in A \mid a\sim x\}$$

$$1^{\sim} = \{x\in A \mid 1 \overset{\equiv_7}{\sim} x\}$$

$$1^{\equiv_7} = \{x\in A \mid 1\equiv_7 x\}$$
$$= \{x\in A \mid 7 \mid x-1\}$$
$$= \{x\in \mathbb{N} \mid 7 \mid x-1\}$$
$$= \{1,8,15,22,29,\dots\} = \{7k+1 \mid k\in\{0,1,\dots\}\}$$

$$8^{\equiv_7} = \{x\in\mathbb{N} \mid 7\mid x-8\} =$$
$$= 1^{\equiv_7} = \{x\in\mathbb{N} \mid 7\mid x-1\} = \{7k+1 \mid k\in\{0,1,2,\dots\}\}$$

$$9^{\equiv_7} = \{x\in\mathbb{N} \mid 7\mid x-9\} = \{2,9,16,\dots\} = \{7k+2 \mid k\in\{0,1,\dots\}\}$$

$$13^{\equiv_7} = \{x\in\mathbb{N} \mid 7\mid x-13\} = \{13,6,20,27,\dots\} = \{7k-1 \mid k\in\mathbb{N}\}$$

Количнички скуп $\mathbb{N}/_{\equiv_7}$?

$$\boxed{\mathbb{N}/_{\equiv_7}} = \{\{1,8,15,\dots\},\{2,9,\dots\},\{3,10,17,\dots\},\{4,11,18,\dots\},\{5,12,19,\dots\},\{6,13,20,\dots\},$$
$$\{7,14,21,\dots\}\} = \{1^{\equiv_7}, 2^{\equiv_7}, \dots, 7^{\equiv_7}\}$$

идентификујемо

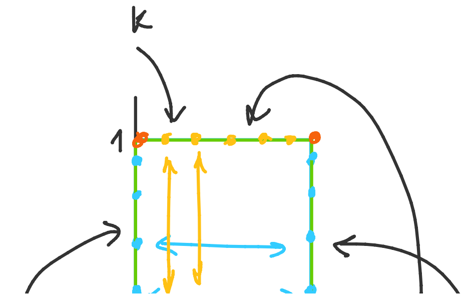
узмемо представнике класа $\longrightarrow$ $\boxed{\{1,2,3,\dots,7\}}$ $\xrightarrow{\text{у сл. } \equiv_7}$ остаци при дељењу са 7

$\{1,2,\dots,6,0\}$

(*) $K = [0,1]\times[0,1]$

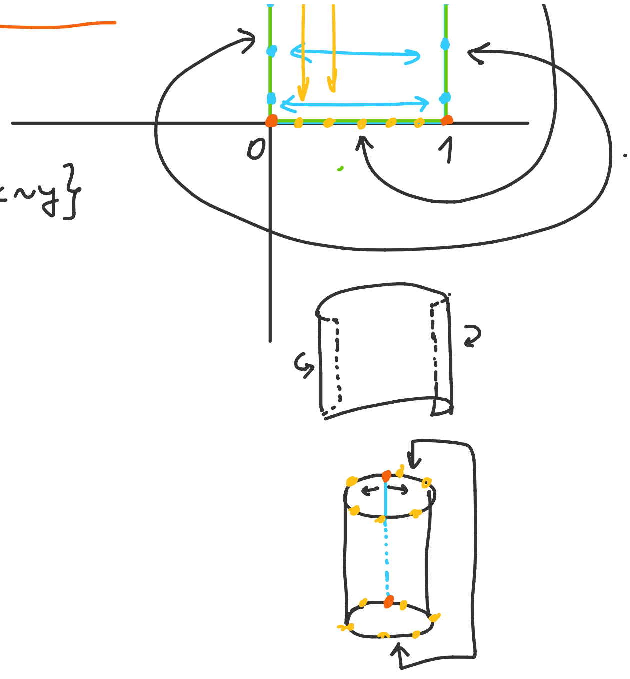
$$(x,y)\sim(u,v) \iff (x=u \wedge y=v) \vee$$
$$(\{x,u\}=\{0,1\} \wedge y=v) \vee$$
$$(x=u \wedge \{y,v\}=\{0,1\}) \vee$$
$$(\{x,u\}=\{0,1\} \wedge \{y,v\}=\{0,1\})$$

$(0,y)\sim(1,y)$
$(1,y)\sim(0,y)$



За вежбу: $\sim$ релација еквив.

$? = X/\sim \; = \{x^\sim \mid x\in X\}, \quad x^\sim = \{y\in X \mid x\sim y\}$



$(x,0)\sim(x,1)$

$(x,1)\sim(x,0)$

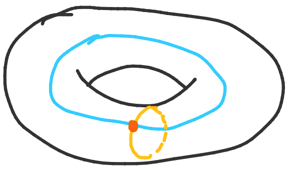
$(0,0)\sim(1,1)$

$(0,1)\sim(1,0)$

$(1,0)\sim(0,1)$

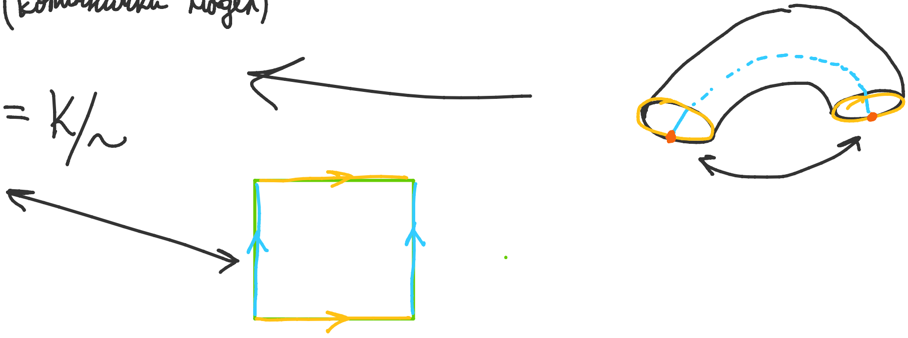
$(1,1)\sim(0,0)$

(количнички модел)



ТОРУС

$= K/\sim$



26. Нека је $\sim$ релација еквиваленције на скупу A. Показати да је количнички скуп $A/\sim$ строго разлагање скупа A.

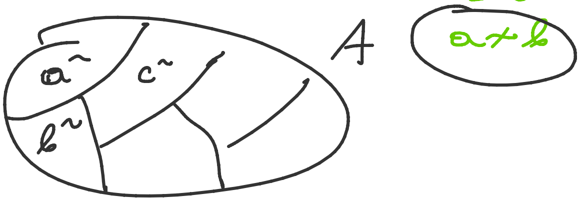
$A/\sim \; = \{a^\sim \mid a\in A\}$

$\underline{a^\sim} = \{x\in A \mid x\sim a\}$

$\left[\, b\sim a \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b\in a^\sim \\ \Rightarrow a\in b^\sim \end{array}\right\} a^\sim = b^\sim \,\right]$

$1^\circ \;\; \bigcup\limits_{a\in A} a^\sim = A$

$2^\circ \;\; a^\sim\cap b^\sim=\emptyset$, за $\neg(a\sim b)$



$1^\circ \;\; \subseteq \checkmark$

$\forall_{a\in A},\ a^\sim\subseteq A$

$\boxed{\supseteq}\;\; x\in A,\ x\in x^\sim \Rightarrow x\in \bigcup\limits_{x\in A} x^\sim \;\checkmark$

2° Нека су a,b тд $\underline{a\not\sim b} \overset{?}{\Longrightarrow} \underline{a^\sim\cap b^\sim \overset{?}{=} \emptyset}$

ппс $\underline{a^\sim\cap b^\sim\neq\emptyset} \Leftrightarrow \exists x\in a^\sim\cap b^\sim$

$\Leftrightarrow (\exists x\in A)\ \underline{x\in a^\sim} \wedge \underline{x\in b^\sim}$

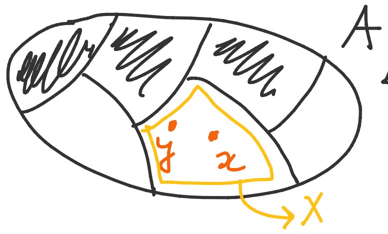
$\Leftrightarrow (\exists x\in A)\ x\sim a \wedge x\sim b$

$\overset{(C)}{\Leftrightarrow} (\exists x\in A)\ a\sim x \wedge x\sim b$

$\overset{(T)}{\Leftrightarrow} (\exists x\in A)\ a\sim b$

$\Rightarrow a\sim b$ ↯ ✓

27. Нека је $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(A)$ строго разлагање скупа A. Показати да постоји јединствена релација еквиваленције $\sim$ на скупу A таква да важи $\mathcal{A} = A/\sim$.



$\swarrow \mathcal{A} = A/\sim$

$\sim$? дефинишемо $\sim$: $x\sim y \Leftrightarrow (\exists X\in\mathcal{A})\ x,y\in X$ (нема другог начина да се дефинише $\Rightarrow$ јесте јединствено!)

Треба док. да је $\sim$ рел. еквив!

Р) $x\sim x \Leftrightarrow (\exists X\in\mathcal{A})\ x,x\in X$ ✓

С) $x\sim y \Leftrightarrow (\exists X\in\mathcal{A})\ x,y\in X \Leftrightarrow (\exists X\in\mathcal{A})\ y,x\in X \Leftrightarrow y\sim x$

Т) $x\sim y \wedge y\sim z \Leftrightarrow (\exists X_1\in\mathcal{A})\ x,y\in X_1 \wedge (\exists X_2\in\mathcal{A})\ y,z\in X_2$

Пошто $y\in X_1\cap X_2$

Разл. строго $\Rightarrow X_1\cap X_2=\emptyset \vee X_1=X_2$

НЕ МОЖЕ

$\Rightarrow (\exists X_1\in\mathcal{A})\ x,y\in X_1 \wedge y,z\in X_1$

$\Rightarrow x,y,z\in X_1$

$\Rightarrow x,z\in X_1$

$\Rightarrow x\sim z$