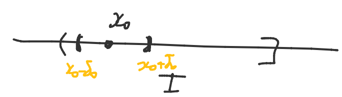
(1) $I\subseteq\mathbb{R}$ интервал и $f: I\to\mathbb{R}$ конвексна функција. Доказати да је $f$ непрекидна у свакој унутрашњој тачки од $I$. ( $x\in \mathrm{int}(I) = \{y\in\mathbb{R} \mid (\exists\varepsilon>0)\,(y-\varepsilon,y+\varepsilon)\subseteq I\}$ , $\mathrm{int}[a,b]=(a,b)$.)

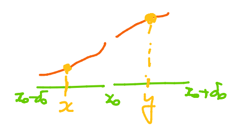
$x_0\in \mathrm{int}(I)$ , $(\exists\delta_0>0)$ $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\subseteq I$



$x\mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ је неопадајућа на $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\setminus\{x_0\} = (x_0-\delta_0,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta_0)$ (због конвексности $f$)

$$\boxed{f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \sup\left\{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \;\middle|\; x\in(x_0-\delta_0,x_0)\right\}$$

← овај sup $\exists$, јер:



$t\in(x_0,x_0+\delta_0)$

$\Rightarrow \forall x\in(x_0-\delta_0,x_0)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$

$$\Rightarrow \sup \le \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$

$\Rightarrow \exists$ го $\Rightarrow \exists \sup$

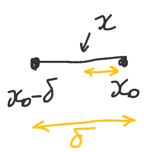
$\lim\limits_{x\to x_0^-} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}$

деф. $\lim\limits_{x\to x_0^-}$

$\Rightarrow \exists f'_-(x_0) \Rightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0)\ \left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'_-(x_0)\right| < \varepsilon$

(БУО узимамо $\delta<\delta_0$)

за $x\in(x_0-\delta,x_0)$: $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \le \left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'_-(x_0)\right| + |f'_-(x_0)|$ (ово је $|a|\le|a-b|+|b|$ нејед. $\Delta$)



$< \varepsilon + |f'_-(x_0)|$

$\Downarrow$

за непр. у $x_0$: (за $x\in(x_0-\delta,x_0)$)

$$|f(x)-f(x_0)| \le \underbrace{|x-x_0|}_{<\delta}\cdot(\varepsilon+|f'_-(x_0)|) < \delta(\varepsilon+|f'_-(x_0)|) < \varepsilon$$

хоћемо!

важи за: $\delta < \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+|f'_-(x_0)|}$

узимамо на крају: $\delta < \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+|f'_-(x_0)|}, \delta_0\right\}$

$\Rightarrow f$ је непрекидна са леве стране у $x_0$

Аналогно иде и за непр. здесна ( $f'_+ \to \inf \to \lim\limits_{x\to x_0^+} \to \dots$ )

$\Rightarrow$ f је непрекидна са леве стране у $x_0$

Аналогно иде и за непр. здесна ( $f'_+ \to$ inf $\to \lim\limits_{x\to x_0+} \to \dots$ )

$\Downarrow$

f је непр.

(2) f је субадитивна на $(0,+\infty)$ ако важи $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty):\ f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2)$

а) Ако је $x\mapsto \frac{f(x)}{x}$ опадајућа на $(0,+\infty)$, онда је f субадитивна.

б) Ако је f конвексна и субадитивна, онда је $x\mapsto \frac{f(x)}{x}$ опадајућа.

$x\mapsto \frac{f(x)}{x}$ опад.

$g(x)=\frac{f(x)}{x}$ опад.

а) $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ ⇝ треба нам $f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2)$

$$f(x_1+x_2) = (x_1+x_2)\cdot\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} = x_1\cdot\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} + x_2\cdot\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} \le$$

из опадајућности →

$$\le x_1\cdot\frac{f(x_1)}{x_1} + x_2\cdot\frac{f(x_2)}{x_2} = f(x_1)+f(x_2)$$

$x_1+x_2>x_1$

$x_1+x_2>x_2$

$\Downarrow$

$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}<\frac{f(x_1)}{x_1}$

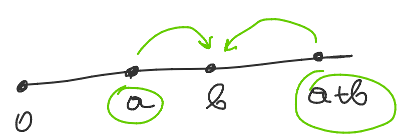
$<\frac{f(x_2)}{x_2}$

$\Downarrow$

f је субадитивна

б) Узмемо $a<b$ из $(0,+\infty)$ произвољне. $\quad \frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$

конв: $f(\lambda\,\sqcup+(1-\lambda)\,\sqcup)\le\dots$




$0<a<b<a+b$

$\swarrow \lambda=\frac{a}{b}$

$$f(b)\overset{(*)}{=} f(\lambda a+(1-\lambda)(a+b))\le$$

(*): $b=\lambda a+(1-\lambda)(a+b)$

$\cancel{b}=\lambda(\cancel{a}-\cancel{a}-b)+a+\cancel{b}$

$\lambda b=a \Rightarrow \lambda=\frac{a}{b}$

конвексност → $\le \lambda\cdot f(a)+(1-\lambda)\cdot f(a+b)\le$

субадитивност → $\le \lambda f(a)+(1-\lambda)(f(a)+f(b))=$

$f(a+b)\le f(a)+f(b)$

$$= f(a)+(1-\lambda)f(b) = f(a)+\left(1-\frac{a}{b}\right)f(b)$$

$$\Rightarrow f(b)\le f(a)+\left(1-\frac{a}{b}\right)f(b)$$

$$f(b) - \left(1 - \frac{a}{b}\right) f(b) \le f(a)$$

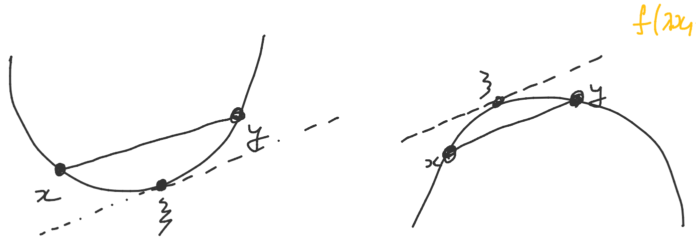
$$\frac{a}{b} f(b) \le f(a) \Rightarrow \frac{f(b)}{b} \le \frac{f(a)}{a} \Rightarrow x \mapsto \frac{f(x)}{x} \text{ опадајућа}$$

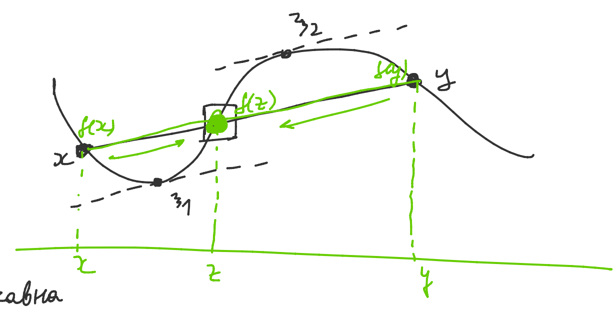
(нерастућа)

③ Нека је $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ диф. и $\forall x,y \in (a,b),\ x<y$ постоји јединствено $\xi \in (x,y)$ тд. $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi)$. Доказати да је $f$ строго конвексна или строго конкавна.

$( > )$

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$




**ППС** $f$ није ни строго конв. ни строго конкавна

$$\Rightarrow \binom{\exists x,y}{\exists \lambda} \text{ тд } \underbrace{f(\lambda x + (1-\lambda) y)}_{= f(z)} = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad , z = \lambda x + (1-\lambda) y$$

($\Rightarrow \exists$ пресек тетиве и графика ф-је)

$x < z \Rightarrow (\exists! \xi_1)\ \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(\xi_1)$

$x < y \Rightarrow (\exists! \xi_3)\ \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi_3)$

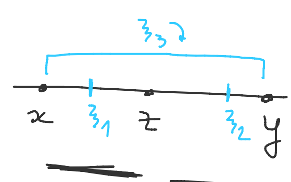
$z < y \Rightarrow (\exists! \xi_2)\ \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'(\xi_2)$

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(x)}{\lambda x + (1-\lambda) y - x} = \frac{(1-\lambda)(f(y)-f(x))}{(1-\lambda)(y-x)} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$\|$$

$$\frac{f(z)-f(y)}{z-y} = \frac{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(y)}{\lambda x + (1-\lambda) y - y} = \frac{\lambda(f(x)-f(y))}{\lambda(x-y)} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$\Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3)$$




$\xi_3$ јединствен $\Rightarrow \xi_1 - \xi_2$

$\xi_3$ јединствено $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \xi_3 = \xi_1 \\ \xi_3 = \xi_2 \end{array}\right\} \xi_1 = \xi_2$

$x < \xi_1 < z < \xi_2 < y$ ↯

$\boxed{T}$ Ако је $f$ два пута диференцијабилна, онда:

$f''(x) > 0$ за $x \in I \Rightarrow f$ је конвексна

$f''(x) < 0$ за $x \in I \Rightarrow f$ је конкавна

пр. $f(x) = \ln(x)$ на $x \in (0, +\infty)$

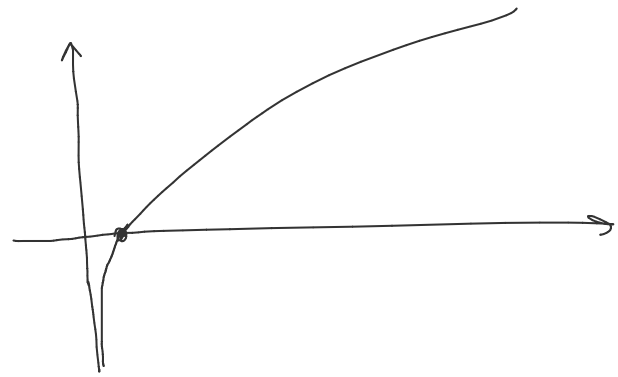
$f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \ln(x) \nearrow$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow \ln(x) \ \cap$

$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

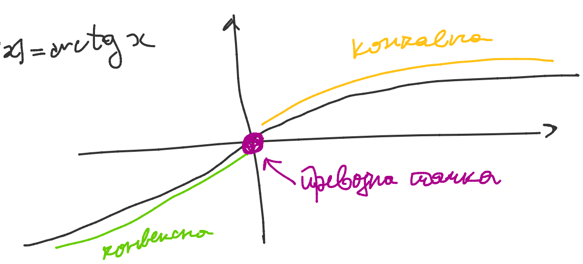
$\lim\limits_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = +\infty$



Деф. Преводна тачка је она у којој се мења тип конвексности.

пр. $f(x) = \operatorname{arctg} x$




ако $\exists f''$, кандидати су $f'' = 0$.

(4) Испитати конвексност $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2 - x^3)^{-2/3} \cdot (2x - 3x^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x - 3x^2}{(x^2 - x^3)^{2/3}}$

$x^2 - x^3 = 0$

$x^2(1 - x) = 0$

$\Downarrow$

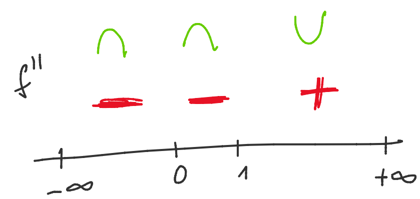
$x = 0 \lor x = 1$

$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$\cdot (x^2 - x^3)^{1/3}$

$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2 - 6x) \cdot (x^2 - x^3)^{2/3} - \frac{2}{3} \cdot (x^2 - x^3)^{-1/3} \cdot (2x - 3x^2) \cdot (2x - 3x^2)}{(x^2 - x^3)^{4/3}} = 2 \frac{(1 - 3x) \cdot (x^2 - x^3) - (2x - 3x^2)^2}{9 \cdot (x^2 - x^3)^{5/3}} =$

$$= \dots = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)\cdot\underbrace{(x^2-x^3)^{2/3}}_{>0}}$$




$D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$\forall x \in D_{f''}$: $f''(x) > 0 \Rightarrow x > 1 \underset{D_{f''}}{\Rightarrow} x \in (1,+\infty)$

$f''(x) < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty,0) \cup (0,1)$

$f$ је конкавна на интервалима $(-\infty,0)$ и $(0,1)$

$f$ је конвексна на $(1,+\infty)$

$f'' \neq 0$, али имамо превојну тачку $x=1$.

(*) Испитати ток и скицирати график:

1) домен
2) парна/непарна/периодична
3) нуле и знак $(f=0,\ f<0,\ f>0)$
4) $f'$, монотоност $(f'=0,\ f'>0,\ f'<0)$
5) $f''$, конвексност $(f''=0,\ f''<0,\ f''>0)$
6) асимптоте, понашање у границама $\left(\lim\limits_{x\to\pm\infty} f,\ \lim\limits_{x\to a\pm} f,\ \lim\limits_{x\to a\pm} f'\right)$ под којим углом улази

⋮ итд.

http://www.matf.bg.ac.rs/p/files/91-Analiza_1_zadaci_sa_casa.pdf

## Неодређени интеграл

**Деф.** $f:(a,b)\to\mathbb{C}$, $F:(a,b)\to\mathbb{C}$ диф. тд. $F'(x)=f(x)$

онда кажемо да је $F$ примитивна ф-ја за $f$.

**Лема:** Ако су $F_1$ и $F_2$ примитивне за $f$ на $(a,b)$, онда $F_1(x)-F_2(x) \equiv const$

(доказ из Лагранжа)

$$f \rightsquigarrow F \rightsquigarrow F + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Деф. Фамилија свих примитивних ф-ја од $f:(a,b) \to \mathbb{C}$ се назива НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ ф-је $f$ и означава са $\int f(x)\,dx$ и пишемо $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

↳ означава скуп

$$\left.\begin{array}{l} f \rightsquigarrow \int f(x)\,dx \\ F \leftsquigarrow F' \end{array}\right\} \text{ "инверзне операције"}$$