Петак 20.11.2020.

59. Нека је $(A,\le,+,0)$ тотално уређена Абелова група (Архимедска) и нека је $a\in A_+^*$. Показати да за све $x\in A$ важи $[x]_a=\max\{k\in\mathbb{Z}\mid ka\le x\}$ и $[x+a]_a=[x]_a+1$.

1) $[x]_a = \max\{k\in\mathbb{Z} \mid ka\le x\}$

$[x]_a \,,\quad x\in\big[[x]_a a,\ [x]_a a + a\big)$

означимо $\max = M \Rightarrow \underbrace{Ma\le x}_{M\in\{k\in\mathbb{Z}\mid ka\le x\}} \wedge \neg\big(\underbrace{(M+1)a\le x}_{M+1\notin\{k\in\mathbb{Z}\mid ka\le x\}}\big)$ јер је M max тог скупа

$\to Ma+a > x$

? $x\in[Ma, Ma+a)$?

$x\ge Ma \ \wedge\ x< Ma+a$

2) $\underbrace{[x+a]_a} = [x]_a + 1$

$\to x+a\in\big[[x+a]_a a,\ [x+a]_a a+a\big)$

$x\in\big[[x+a]_a a - a,\ [x+a]_a a\big)$

$x\in\big[(\underbrace{\boxed{[x+a]_a-1}}_{\in\mathbb{Z}})a,\ \underbrace{\boxed{[x+a]_a}}_{\in\mathbb{Z}}a\big)$

$x\in\big[\underbrace{\boxed{[x]_a}}_{\in\mathbb{Z}}a,\ (\underbrace{\boxed{[x]_a+1}}_{\in\mathbb{Z}})a\big)$

из јединствености

$[x+a]_a-1 = [x]_a$ ✓

60. Нека је $(A,\le,+,0)$ тотално уређена Абелова група (Архимедска) и нека је $a\in A_+^*$. Показати да за све $x\in A$ важи $\{x+a\}_a=\{x\}_a$.

$\{x\}_a = \underbrace{x}_{\in A} - \underbrace{[x]_a}_{\in\mathbb{Z}}\underbrace{a}_{\in A} \in A$

$\{\cdot\}_a : A\to A$ функција

$x\mapsto x-[x]_a a$

$\{\pi\} = \pi-3 \in [0,1)$

$\{-2\} = 0$

$\{-\frac{3}{2}\} = -\frac{3}{2}-(-2) = \frac{1}{2}$

$x+a-\boxed{[x+a]_a}a \overset{?}{=} x-[x]_a a$

$[x+a]_a = [x]_a+1$

$-([x]_a+1)a$

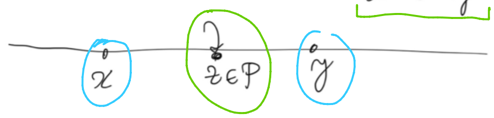
$-[x]_a a - a$

$x+\cancel{a}-[x]_a a-\cancel{a} \overset{?}{=} x-[x]_a a$ ✓

Деф: Нека је $(E, \leq)$ тотално уређен скуп. Подскуп $P \subseteq E$ је ГУСТ У E ако

$$(\forall x,y \in E)\, x<y \Rightarrow (\exists z \in P)\, x<z<y$$

строго мање!



61. Показати да скуп $\mathbb{Z}$ није густ у $(\mathbb{Z}, \leq)$.

$E=\mathbb{Z}$, $P=\mathbb{Z}$ $\quad P \subseteq E$

$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$
$\Leftrightarrow p \wedge \neg q$

$$\neg\Big((\forall x,y \in E)\big(\underbrace{x<y}_{p} \Rightarrow \underbrace{(\exists z \in P)\, x<z<y}_{\neg q}\big)\Big)$$

$\Leftrightarrow$

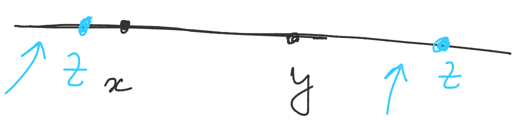
$\neg(x<z<y)$

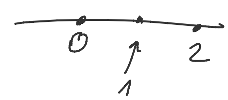
$\neg(x<z \wedge z<y)$

$\neg(x<z) \vee \neg(z<y)$

$x \geq z \vee z \geq y$

$$(\exists x,y \in E)\, x<y \wedge (\forall z \in P)\, x \geq z \vee z \geq y$$





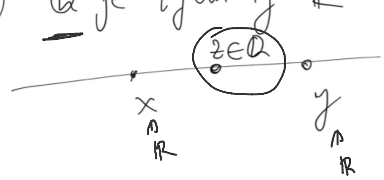
$$(\exists x,y \in \mathbb{Z})\, x<y \wedge (\forall z \in \mathbb{Z})\, x \geq z \vee z \geq y \quad ✓$$

→ нама треба само неки конкретни x и y → узимамо узастопне

нпр. $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}\right\}$

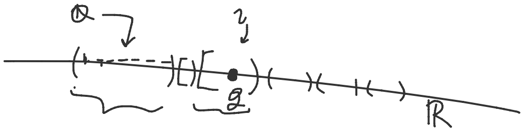
$(\forall z \in \mathbb{Z})\ z \leq 0 \vee z \geq 1$? → ВАЖИ! Јер између 0 и 1 нема целих бројева!

(*) ③ $\mathbb{Q}$ је густ у $\mathbb{R}$ ← нисмо доказали, али ћемо користити



341: Доказати да на $\mathbb{R}$ постоји највише пребројиво много дисјунктних интервала.

$$\left[\ \bigsqcup_{i \in I} I_i \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow I \text{ је највише пребројив.} \quad I_i\text{-интервал} \right]$$



$f : \mathcal{J} \to \mathbb{Q}$

$f(i) = q$, такво да је $q \in I_i$ — зашто постоји? — зато што је $\mathbb{Q}$ густ у $\mathbb{R}$

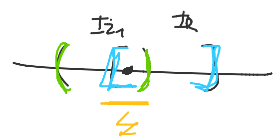
нпр. $I_i = (a, b)$ $\quad ((-\infty, a], [a, b), \dots)$

$(\forall a, b \in \mathbb{R})\, a < b \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q})\, a < q < b \;\to\; q \in I_i$

ово q узмемо да буде из деф да је $\mathbb{Q}$ густ у $\mathbb{R}$.

$i \to I_i$, $i \in \mathcal{J}$

f је инјективно — $\left.\begin{matrix} f(i_1) = f(i_2) \\ q_1 = q_2 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} q_1 \in I_{i_1} \\ q_2 \in I_{i_2} \end{matrix}\right\}$ $I_{i_1} \cap I_{i_2} = \emptyset$ ↯

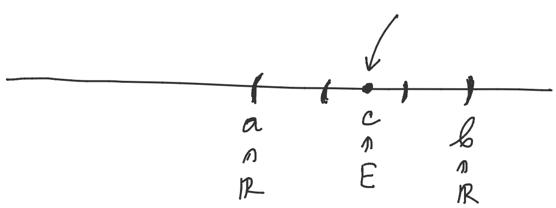


$\Downarrow$

$\mathrm{Card}(\mathcal{J}) \le \mathrm{Card}(\mathbb{Q}) \Rightarrow \mathcal{J}$ највише пребројив

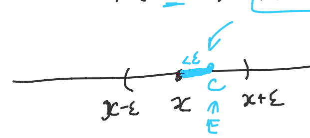
(*) (82. у скрипти)

Доказати да је $E = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ густ у $\mathbb{R}$.



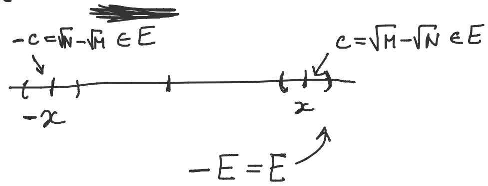
$\Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists c \in E)\; |x - c| < \varepsilon.$

$c \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$



$c = \sqrt{M} - \sqrt{N}$

• БУО можемо да гледамо $x \geq 0$.



• фиксирамо $x \geq 0$ и $\varepsilon > 0$ са којима ћемо да радимо. Треба да докажемо

$$(\exists M, N \in \mathbb{N}) \qquad |\sqrt{M}-\sqrt{N}-x| < \varepsilon.$$

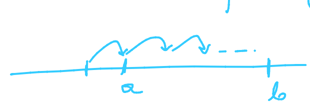
• Посматрамо $\sqrt{k+1}-\sqrt{k} = \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{(k+1)-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}_{>\sqrt{k}}} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \varepsilon.$

Изаберемо $k \in \mathbb{N}$ т.д. $\sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \varepsilon$.

Зашто то можемо? $\frac{1}{2\sqrt{k}} < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{k} > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow \boxed{k > \frac{1}{4\varepsilon^2}}$ ↳ фиксирано

овакво k $\exists$ због Архимедове аксиоме (АРХ)

другим речима: $\mathbb{N}$ није ограничен одозго!



$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = \frac{1}{4\varepsilon^2} \end{array}\right\} \overset{\text{АРХ}}{\Longrightarrow} (\exists k \in \mathbb{N})\ k \cdot 1 > \frac{1}{4\varepsilon^2}.$

• Посматрамо $n \cdot (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \in E$

$$\| $$

$$\sqrt{\underbrace{n^2k+n^2}_{M}} - \sqrt{\underbrace{n^2k}_{N}} = \sqrt{M}-\sqrt{N} \in E$$

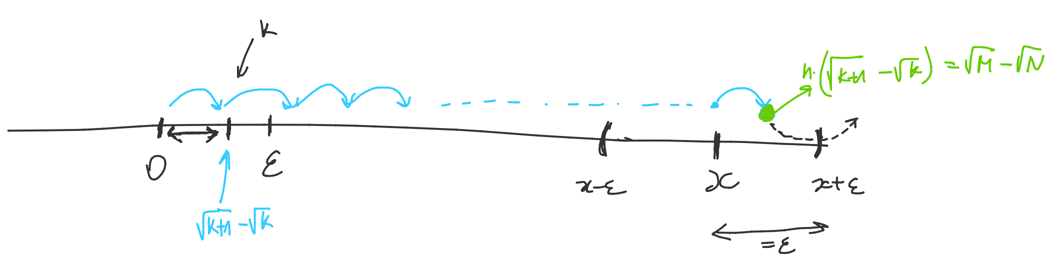
Ово ће бити M и N за решење, само треба n да изаберемо одговарајуће!

Бирамо n т.д. $n \cdot (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \geq x$; и узмемо најмање такво!

1) Зашто овакво n постоји? АРХ!

$\left.\begin{array}{l} a = \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \\ b = x \end{array}\right\} (\exists n \in \mathbb{N})\ n \cdot (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \geq x$

2) Зашто постоји најмање такво? — сваки подскуп од $\mathbb{N}$ има минимум.



- до сада: – фиксирали x и ε
  – фиксирали k тд $\sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \varepsilon$ (*)
  – фиксрали min n тд $n\cdot(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \geq x$ (*)

Доказујемо да су $M = n^2(k+1)$, $N = n^2 k$ решења (оно што тражимо)

$$\left|\sqrt{M}-\sqrt{N}-x\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{M}-\sqrt{N}-x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\sqrt{M}-\sqrt{N} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$

(*) $\sqrt{M}-\sqrt{N} \geq x > x-\varepsilon$ ✓

$\sqrt{M}-\sqrt{N} < x+\varepsilon$?

(*) $\Rightarrow$ за $n-1$ не важи: $(n-1)(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) < x$

$$n\cdot(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) - (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) < x$$

$$\sqrt{M}-\sqrt{N} < x + (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \underset{(*)}{<} x+\varepsilon$$

$\sqrt{M}-\sqrt{N} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ✓

__Став:__ Нека је $(A,+,\leq,0)$ Архимедска група и $(B,+,\leq,0)$ њена подгрупа, $B \neq \{0\}$.
Тада важи:
- а) B је густ у $A \Leftrightarrow \underbrace{\inf}_{\text{ово је инфимум у } (A,\leq)} B^*_+ = 0$
- б) B није густ у $A \Leftrightarrow B^*_+$ има min

62. Да ли важи следеће? Нека је $(A, +, \leq, 0)$ Архимедска група и $(B, +, \leq, 0)$ њена подгрупа при чему важи $B \neq \{0\}$. Тада је
    а) B је густ у $A \Leftrightarrow \sup B^*_- = 0$,
    б) B није густ у $A \Leftrightarrow B^*_-$ има максимум.

$B \to \underbrace{-B}_{\text{такође подгрупа!}} = B$

$-B = \{-b \mid b \in B\}$

$$-b_1 - b_2 = -(\underbrace{b_1+b_2}_{\in B}) \in -B$$

$$-(-b_1) = b_1 \in B = -B$$

$\boxed{B=-B}$

$x \mapsto -x$ аутоморфизам групе

$\boxed{\inf(-A) = -\sup A}$

$\ldots) = 0 \Leftrightarrow \sup B^* = 0$

$[\inf(-A) = -\sup A]$

г) B густ у A $\iff$ $-B$ густ у A $\overset{\text{ст.}}{\iff}$ $\inf(-B)^*_+ = 0$ $\iff$ $\inf(-B^*_-) = 0$ $\iff$ $-\sup B^*_- = 0$

$\iff \sup B^*_- = 0$

$$(-B)^*_+ = -B^*_-$$

$(-B)^*_+$: позитивни ел. од $-B$

$-B^*_-$: опозити (инверзи) негативних ел. од B

б) слично