Четвртак 20.05.2021.

(1) $\int_0^{1/3} \frac{dx}{x^p|\log x|^q} = \Big/ \; t=\frac{1}{x}, \quad dt = -\frac{dx}{x^2}, \quad dx = -x^2\,dt = -\frac{dt}{t^2}$

x	0	$1/3$
t	∞	3

$\Big/ = \int_\infty^3 \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\left(\frac{1}{t}\right)^p \cdot \left|\log\frac{1}{t}\right|^q} = \int_3^\infty \frac{dt}{t^{2-p}\cdot(\log t)^q}$

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p(\log x)^q}$

$\left|\log\frac{1}{t}\right| = |-\log t| = \log t$

$t\in[3,\infty) \Rightarrow \log t>0$

→ ово конв. акко $(2-p>1) \vee (2-p=1 \wedge q>1)$

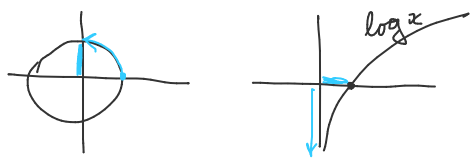
$\boxed{p<1 \vee (p=1 \wedge q>1)}$

(*) када се уводи смена, интеграли су еквиконвергентни!

(*) од 1 или од 3? свеједно $\quad \int_3^\infty = \int_1^\infty - \int_1^3$ $<\infty$

(2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\log(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin x \in(0,1] \Rightarrow \log(\sin x)\in(-\infty,0] \Rightarrow \frac{\log(\sin x)}{\sqrt{x}}\le 0$ на $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.



⇒ можемо поредити

$$\frac{\log(\sin x)}{\sqrt{x}} \sim \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

небитно!

$\int_0^{\pi/2}\frac{\log(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$ конв. ⟺ $\int_0^{\pi/2}\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ конв. ⟺ $\int_0^{1/3}\frac{dx}{x^{1/2}\cdot(\log x)^{-1}}$ конв. ⟺ $-\int_0^{1/3}\frac{dx}{x^{1/2}|\log x|^{-1}}$ конв

(1) $p=\frac{1}{2}$, $q=-1$, $\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ конвергира!

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$, $p,q>0$

$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$ Почетни конв. акко оба $\int_0^1$ и $\int_1^{+\infty}$ конв.

$\boxed{\int_0^1}$: $\int_0^1 \frac{dx}{x^p+x^q}$

$\frac{1}{x^2+x^4} \sim \frac{1}{x^2}$, $x\to 0$

$$\frac{1}{x^p+x^q} = \frac{1}{x^{\min\{p,q\}}(1+x^k)} \sim \frac{c}{x^{\min\{p,q\}}}, \quad x\to 0$$

$k\geqslant 0$ $\qquad c = \begin{cases} 1, & k>0 \\ 1/2, & k=0 \end{cases}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p+x^q} \text{ конв.} \iff \int_0^1 \frac{c\,dx}{x^{\min\{p,q\}}} \text{ конв.} \iff \min\{p,q\}<1$$

$\boxed{\int_1^{+\infty}}$:

$\frac{1}{x^2+x^4} \sim \frac{1}{x^4}$, $x\to\infty$

$$\frac{1}{x^p+x^q} = \frac{1}{x^{\max\{p,q\}}\left(1+\frac{1}{x^k}\right)} \sim \frac{c}{x^{\max\{p,q\}}}, \quad x\to\infty$$

$k\geqslant 0$ $\qquad c = \begin{cases} 1, & k>0 \\ 1/2, & k=0 \end{cases}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q} \text{ конв.} \iff \int_1^{+\infty} \frac{c\,dx}{x^{\max\{p,q\}}} \text{ конв.} \iff \max\{p,q\}>1$$

Почетни конв. $\iff \min\{p,q\}<1<\max\{p,q\}$.

→ Конвергенција где није $f\geqslant 0$

$\boxed{T}$ (Абелов и Дирихлеов критеријум) $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$, сингуларитет у b, $f,g\in R_{loc}[a,b)$.

(A1) $\int_a^b f(x)\,dx$ конв.

(A2) $(\exists M>0)$ $|g(x)|\leq M$, $\forall x\in[a,b)$, и g монотона

$$(A1)+(A2) \underset{\text{Абел}}{\Longrightarrow} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \text{ конвергира}$$

(Д1) $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ и $(\exists M>0)\ |F(x)|\le M,\ \forall x\in[a,b)$

(Д2) $\lim\limits_{x\to b-} g(x)=0$, и g монотона

$$(Д1)+(Д2) \underset{\text{Дирихле}}{\Longrightarrow} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \text{ конвергира}$$

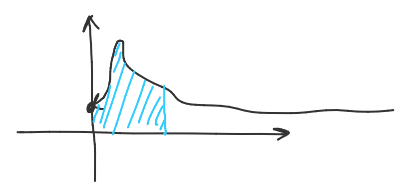
Деф. $f\in R_{loc}[a,b)$. кажемо да је f апсолутно интеграбилна ако $\int_a^b |f(x)|\,dx<\infty$ (конв.)

↳ интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ апсолутно конвергира

$\boxed{T}$ $\int_a^b |f(x)|\,dx$ конв. $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ конв.

(*) Ако се деси $\int_a^b f(x)\,dx$ конв., а $\int_a^b |f(x)|\,dx$ не конв. $\Longrightarrow$ условно (неапсолутно) конвергира.

(4) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ (испитати обичну конв.)



сингуларитети? ∞ ✓

0? $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow$ 0 није сингуларитет

(0 је отклоњив сингул.)

(*) сингуларитет је тачка у чијој околини је ф-ја неограничена и тачке $\pm\infty$ у границама

$f(x)=\sin x$

$g(x)=\frac{1}{x}$

Д1) $F(x)=\int_0^x \sin t\,dt = (-\cos t)\Big|_0^x = 1-\cos x$

$M=2$: $|F(x)|=|1-\cos x| \le 1+|\cos x| \le 2$

Д2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, + $\frac{1}{x}$ монотона

$$\underset{\text{Дирихле}}{\Longrightarrow} \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx \text{ конв.}$$

(5) $\int^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{}\,dx$

(5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\to 1}\cdot \underbrace{\sin x}_{\to 0} = 0 \Rightarrow$ 0 је отклоњив сингул.

$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ конв. $\Leftrightarrow$ $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ конв.

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$$

$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{2x}$ див. (по ПК)

$\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$ конв. (по Дир.)

$\Bigg\}$ $\int\limits_1^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}\right)}_{=\frac{\sin^2 x}{x}} dx$ дивергира

Д1) $F(x) = \int\limits_1^{x} \cos 2t\,dt = \left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_1^{x} = \frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 2)$

$|F(x)| \le \frac{1}{2}\Big(\underbrace{|\sin 2x|}_{\le 1} + \underbrace{|\sin 2|}_{\le 1}\Big) \le \frac{1}{2}(1+1) = 1.$

Д2) $\frac{1}{2x} \searrow 0$, $x\to\infty$

$\Rightarrow \int\limits_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ див. $\Rightarrow \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ див.

Домаћи: Показати да $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ условно конвергира. (као код задатка: $|\sin x| \geq \sin^2 x$)

(6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ домаћи: преко Дирихлеа

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \Big(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\Big)^2 = 1 \Rightarrow$ 0 је отклоњив

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ конв. $\Leftrightarrow$ $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$

$\frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$, $\Big(\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ конв. $\overset{ПК}{\Rightarrow} \int\limits_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ конв.$\Big)$

$$0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2}} \text{ конв.} \underset{2>1}{} \overset{\text{ПК}}{\Longrightarrow} \int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \text{ конв.} \right)$$

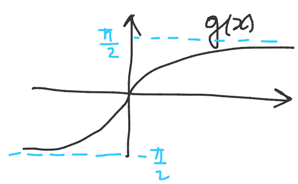
$\Rightarrow$ почетни конв

⑦ $$\int_0^{+\infty} \boxed{\frac{\sin x}{x}}\, \boxed{\operatorname{arctg} x}\, dx$$
$f(x)$ $g(x)$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\to 0} = 0 \Rightarrow \infty \text{ једини сингул.}$$

A1) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ конв ④

A2)



$g(x) = \operatorname{arctg} x$ је монотона

$|g(x)| \le \frac{\pi}{2}$

$\Longrightarrow$ почетни конв.
Абел

⑧ $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \text{ не постоји!}$$

$$\left(x_n = \frac{1}{2n\pi} \qquad y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \qquad \text{проверити} \right)$$

$\Rightarrow$ и 0 је сингул.

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$

$\boxed{\bullet}$ $$\int_0^1 \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\left| \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \right| = \frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ конв. $\overset{ПК}{\Longrightarrow}$ $\int_0^1 \left|\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}\right| dx$ конв. $\Longrightarrow$ $\int_0^1 \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ конв.

$1/2<1$

● $$\int_1^\infty \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^\infty \frac{\sin x\cdot\cos\frac{1}{x} + \cos x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Хоћемо да оба два конв.

● $$\int_1^\infty \frac{\sin x\cdot\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$\longrightarrow \int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ конв. по Дир: Д1) $\sin x$ има огр. прим. фје ✓

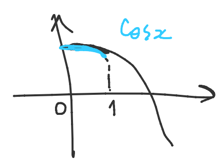
Д2) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ монотоно и $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$\longrightarrow$ А1) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ конв.

А2) $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \le 1$

$x\in[1,\infty) \Rightarrow \frac{1}{x}\in(0,1]$

$1\le\frac{\pi}{2}$



$\frac{1}{x}$ монотоно, $\cos\frac{1}{x}$ моноt.

$\overset{}{\Longrightarrow}$ Абел $\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}$ конв.

● $$\int_1^\infty \frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$$ конв.

доказати: слично као претходни

Закључак: ● ●

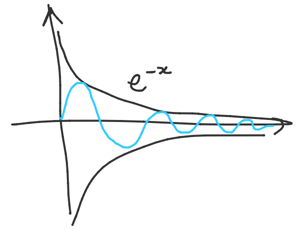
⇓

● ●

⇓

почетни конв.

9) Испитати условну и апсолутну конв. $\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot\sin x\,dx$.



испитујемо апсолутну: $\quad |e^{-x}\cdot\sin x| \le e^{-x}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to\infty}\overbrace{\left(-e^{-x}\right)}^{=0} + 1 = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \text{ конв.}$$

$$\overset{ПК}{\Longrightarrow} \int_0^{+\infty} \left|e^{-x}\cdot\sin x\right| dx \text{ конв.} \Rightarrow \text{почетни апсолутно конв.}$$
$$\Rightarrow \text{конв. и обично}$$

Домаћи:

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$

2) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\log x}{1-x^2}\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\operatorname{tg}x\,dx$

4) $\displaystyle\int_1^{2}\frac{dx}{\log x}$