Понедељак 19.10.2020.

- $X \times Y \subset A \times B \Leftrightarrow X \subset A \wedge Y \subset B$, X, Y непразни $\longrightarrow X = \emptyset$

$X \times Y = \emptyset \subset A \times B$

$X \subset A$ ✓

$Y \subset B$ ×

$\not\Rightarrow$

$\Leftarrow$ важи увек

$\boxed{\Rightarrow}$ знамо $X \times Y \subset A \times B$

треба $X \subset A \wedge Y \subset B$

1° $X \subset A$ $\quad x \in X \overset{?}{\Rightarrow} x \in A$

$$\left.\begin{array}{l} x \in X \\ Y \text{ непразан} \Rightarrow \exists y \in Y \\ (Y \neq \emptyset) \end{array}\right\} (x, y) \in X \times Y \Rightarrow (x, y) \in A \times B$$

$\Rightarrow x \in A$

2° $Y \subset B$

аналогно

$\boxed{\Leftarrow}$ знамо $X \subset A \wedge Y \subset B$

треба $\boxed{X \times Y \subset A \times B}$

$(x, y) \in X \times Y \Rightarrow (x, y) \in A \times B$

$(x, y) \in X \times Y \Rightarrow x \in X \wedge y \in Y \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \Rightarrow (x, y) \in A \times B$

15. Нека су дата пресликавања $f_j : A \to B_j$ за $1 \leq j \leq n$ при чему знамо да је свако пресликавање дато као уређена тројка $f_j = (F_j, A, B_j)$. Дефинишемо пресликавање

$$f = (f_1, ..., f_n) : A \to B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$$

једнакошћу

$$\boxed{f(a) = (f_1(a), f_2(a), ..., f_n(a)).}$$

Показати да важи $f_j = \pi_j \circ f$ где су пресликавања π_j пројекције $\pi_j : B_1 \times B_2 \times ... \times B_n \to B_j$, $1 \leq j \leq n$.

Напомена: Обратити пажњу да једнакост $f_j = \pi_j \circ f$ заправо означава једнакост уређених тројки. Задатак је да проверите да ли су одговарајући елементи уређених тројки једнаки.

$f_1 : A \to B_1$

$f_2 : A \to B_2$

$\vdots$

$f_n : A \to B_n$

$f_j = (F_j, A, B_j)$

$f_j : A \to B_j$

$(x, y) \in F_j \Leftrightarrow y = f_j(x)$

$\boxed{f_j = \pi_j \circ f}$

$\pi_j : B_1 \times \ldots \times B_n \longrightarrow B_j$, j-та пројекција

$\pi_j(b_1, \ldots, b_n) = b_j$, пр $\pi_2(x, y, z) = y$

$f_j : A \to B_j$

$\pi_j : B_1 \times \ldots \times B_n \to B_j$

$f : A \to B_1 \times \ldots \times B_n$

$\pi_j \circ f : A \xrightarrow{f} B_1 \times \ldots \times B_n \xrightarrow{\pi_j} B_j$

домен: $f_j : A$

$\pi_j \circ f : A$

кодомен: $f_j : B_j$

$\pi_j \circ f : B_j$

$F_j = \Pi_j \circ F$

рел. за π_j

рел. за f

Деф: Пресликавање скупа A у скуп B је тројка

$f = (F, A, B)$

где је $F \in \mathcal{P}(A \times B)$ функционалан график и важи $A = \pi_1 F$ и (тривијално) $\pi_2 F \subseteq B$.

⊛ F називамо и графиком пресликавања

Ознаке $f : A \longrightarrow B$

A = Домен пресликавања f

B = Кодомен пресликавања f

$\pi_2 F$ = скуп вредности преслик. f

$f(a) = b \Leftrightarrow (a, b) \in F$

Деф: Композиција пресликавања $f=(F,A,B)$ и $g=(G,X,Y)$ при чему важи $F(A)\subseteq X\subseteq B$ је пресликавање $g\circ f=(\underbrace{G\circ F}_{\text{композиција графика}},A,Y)$

$$f_j=\pi_j\circ f \iff (F_j,\_,\_)=(\Pi_j\circ F,\_,\_)$$

$$(a,b_j)\in\Pi_j\circ F \iff (\exists c\in B_1\times\dots\times B_n)\,(a,c)\in F\wedge(c,b_j)\in\Pi_j$$

$$\iff(\exists c\in B_1\times\dots\times B_n)\ f(a)=c\ \wedge\ \pi_j(c)=b_j$$

$$\iff(\exists c\in B_1\times\dots\times B_n)\ (f_1(a),\dots,f_n(a))=\underline{c}\ \wedge\ \pi_j(\underline{c})=b_j$$

$$\iff(\exists c\in B_1\times\dots\times B_n)\qquad b_j=\pi_j(f_1(a),\dots,f_n(a))=f_j(a)$$

$$\iff(a,b_j)\in F_j$$

16. Одредити координатна пресликавања следећег пресликавања $f:\mathbb{R}\to[0,1)\times\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ које је дато са $f(x)=(\{x\},[x],x^2)$.

Напомена: $\{x\}$ означава разломљени део реалног броја док $[x]$ означава цео део реалног броја x.

$f_j=\pi_j\circ f$

$$[0,1)\times\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\xrightarrow{\pi_1}[0,1)\qquad[0,1)\times\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\xrightarrow{\pi_2}\mathbb{Z}\qquad[0,1)\times\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\xrightarrow{\pi_3}\mathbb{R}$$

$f_j:\mathbb{R}\to$ $[0,1)$ ∨ $\mathbb{Z}$ ∨ $\mathbb{R}$

$f_1=\pi_1\circ f:\mathbb{R}\to[0,1)$

$f_1(x)=\pi_1(\{x\},[x],x^2)=\{x\}$

$f_2(x)=\pi_2\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$

$f_2(x)=\pi_2(\{x\},[x],x^2)=[x]$

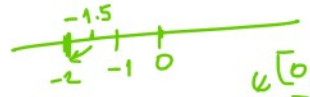
$f_3=\pi_3\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f_3(x)=\pi_3(\{x\},[x],x^2)=x^2$

Цео део: $[\cdot]:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$

$x\in\mathbb{R}$, $[x]$ - највећи цео број $\le x$

$[\pi]=3$, $[-1.5]=-2$, $[7]=7$



разломљени део $\{x\}=x-[x]$ $\in[0,1)$

$\{\frac{3}{2}\}=0.5$, $\{2\}=0$

$0\le x-[x]<1$

$$\boxed{\begin{array}{c}[x]\le x<[x]+1\\ x-1<[x]\le x\end{array}}$$

17. Посматрамо операцију $+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на скупу реалних бројева и нека су дати подскупови $A=(-1,3)$ (отворен интервал) и $B=\{5,-2\}$ скупа $\mathbb{R}$. Чему је једнако $A+B$?

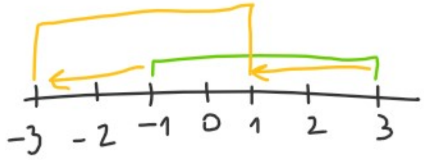
$A+B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}$

$(-1,3)+\{5,-2\}=?$

$5:\quad(-1,3)+\{5\}=(4,8)$

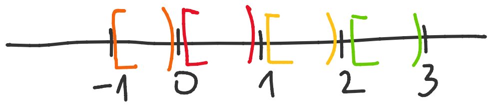
$-2:\quad(-1,3)+\{-2\}=(-3,1)$

$A+B=(4,8)\cup(-3,1)$



(*) $[0,1)=A$, $B=\mathbb{Z}$

(*) $[0,1) = A$, $B = \mathbb{Z}$



$A + B = ?$

$-1 \in B: \quad [0,1) + \{-1\} = [-1,0)$

$0 \in B: \quad [0,1) + \{0\} = [0,1)$

$1 \in B: \quad [0,1) + \{1\} = [1,2)$

$2 \in B: \quad [0,1) + \{2\} = [2,3)$

$\bigcup: \quad A + B = \mathbb{R}$

(*) $[0,1) + (1,2) = ? \qquad (1,3)$

18. Показати да је пресликавање $\boxed{f(x) = \log x}$ морфизам алгебарске структуре $((0,+\infty), \leq, \cdot, 1)$ у алгебарску структуру $(\mathbb{R}, \leq, +, 0)$.

$\log x = \ln x$

$\big(\boxed{(0,+\infty)}, \boxed{\leq}, \boxed{\cdot}, \boxed{1}\big)$

$\big(\boxed{\mathbb{R}}, \boxed{\leq}, \boxed{+}, \boxed{0}\big)$

скуп — релација — операција — истакнути елемент

Деф: Нека су

$\mathcal{A} = (A, R_1, \dots, R_k, \varphi_1, \dots, \varphi_\ell, a_1, \dots, a_m)$

и

$\mathcal{B} = (B, S_1, \dots, S_k, \psi_1, \dots, \psi_\ell, b_1, \dots, b_m)$

две алгебарске структуре, при чему су R_j и S_j релације исте дужине $(1 \leq j \leq k)$ а φ_i и ψ_i су операције исте дужине $(1 \leq i \leq \ell)$. Пресликавање

$\boxed{f: A \to B}$

је МОРФИЗАМ (или ХОМОМОРФИЗАМ) структура $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ако важи

(1) $f(a_j) = b_j, \quad 1 \leq j \leq m$,

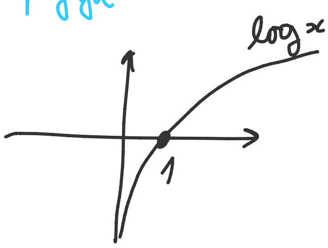
(2) $f(\varphi_j(x_1, \dots, x_t)) = \psi_j(f(x_1), \dots, f(x_t))$ за све $x_1, \dots, x_t \in A$

φ_j и ψ_j су операције дужине t

(3) $(x_1, \dots, x_n) \in R_j \Rightarrow (f(x_1), \dots, f(x_n)) \in S_j$ за све $x_1, \dots, x_n \in A$

R_j и S_j су релације дужине n

(0) $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ✓



(1) $f(1) = 0$?

$\log(1) = 0 \quad (e^0 = 1)$

(2) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

$\cdot$ и $+$ су бинарне операције, x, y – два елемента

$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$ ✓ $\quad (e^{x+y} = e^x \cdot e^y)$

(3) $x, y \in (0,+\infty), \quad x \leq y$

$\Downarrow ?$

$f(x), f(y) \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq f(y)$

$x \leq y \Rightarrow \log x \leq \log y$ ✓ (log растућа ф-ја)

Деф: Фамилија елемената скупа A са индексима у скупу I је пресликавање $f: I \to A$,

Деф: Нека је $f: I \to \mathcal{P}(X)$ фамилија у партитивном скупу скупа X, тј. $f(i) = A_i \in \mathcal{P}(X)$. Уопштење Декартовог производа дефинише се као

$$\prod_{i\in I} A_i := \{\varphi : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid \varphi(i) \in A_i\}$$

реалан низ $\quad a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$

$3.14, 2, -1, \frac{1}{7}, \dots$

$\downarrow$

индекси: $\mathbb{N}$

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a(1) = a_1$

$a(2) = a_2$

$\vdots$

19. Ако је $I = \{1, 2, ..., n\}$ коначан скуп показати да важи $\prod_{i\in I} A_i = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Приметимо да је овде лева страна дефинисана као скуп одговарајућих пресликавања а десна као скуп уређених $n-$торки. Објаснити како идентификујемо та два скупа.

$$\{\varphi : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid \varphi(i) \in A_i\} \stackrel{?}{=} A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n, \quad I = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\{\varphi : \{1, \dots, n\} \to A_1 \cup \dots \cup A_n \mid \varphi(k) \in A_k\} \longleftrightarrow \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_k \in A_k\}$$

$\boxed{\leftarrow}$ $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$ $(a_k \in A_k)$: $\varphi : \{1, \dots, n\} \to A_1 \cup \dots \cup A_n$ т.д. $\varphi(k) \in A_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$

$\varphi(k) = a_k$

$\boxed{\rightarrow}$ $\varphi : \{1, \dots, n\} \to A_1 \cup \dots \cup A_n$, $\varphi(k) \in A_k$: $(\varphi(1), \dots, \varphi(n)) \in A_1 \times \dots \times A_n$

$\varphi(k) \in A_k$

$$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto \varphi \longmapsto (\varphi(1), \dots, \varphi(n)) = (a_1, \dots, a_n)$$

$(\varphi(k) = a_k)$

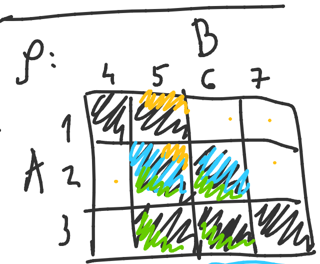
Деф: Нека је ρ релација дефинисана графиком $\Gamma \subseteq A \times B$, нека су дати подскупови $X \subseteq A$ и $Y \subseteq B$. Тада: важи

$$X \rho Y \stackrel{def}{\iff} (\forall x \in X)(\forall y \in Y)\, x \rho y.$$

Скуп X^ρ се дефинише са

$$\boxed{X^\rho := \{b \in B \mid X \rho \{b\}\}}$$

пр.



$\{2\} \rho \{5, 6\}$

$\{2, 3\} \rho \{5, 6\}$

$\{1, 2\}^\rho = \{5\}$

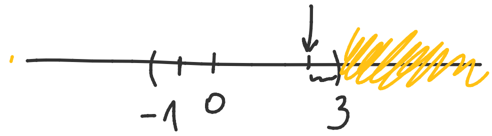
$(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \leq)$

$(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \le)$

20. Нека је дат скуп $\mathbb{R}$ са релацијом $\le$ и његови подскупови $X = \{1\}$, $Y = (-1, 3)$. Чему су једнаки скупови $X^{\le}$ и $Y^{\le}$?

$$X^{\le} = \{b\in\mathbb{R} \mid X \le b\} = \{b\in\mathbb{R} \mid \{1\} \le b\} = \{b\in\mathbb{R} \mid 1 \le b\} = [1, +\infty)$$

$$Y^{\le} = \{b\in\mathbb{R} \mid Y \le b\} = \{b\in\mathbb{R} \mid \underbrace{(-1,3) \le b}\} = \{b\in\mathbb{R} \mid \underbrace{(\forall x\in(-1,3))\ x \le b}\} = \{b\in\mathbb{R} \mid b \ge 3\} = [3, +\infty)$$



21. На скупу природних бројева $\mathbb{N}$ релацију дели означимо са ρ. Нека је дат подскуп $X = \{7, 11\}$. Чему је једнако X^{ρ}?

$$X^{\rho} = \{b\in\mathbb{N} \mid X \rho b\} = \{b\in\mathbb{N} \mid \{7,11\} \mid b\} =$$

$$= \{b\in\mathbb{N} \mid (\forall x\in\{7,11\})\ x \mid b\}$$

сви бројеви који су дељиви и са 7 и са 11 $\iff$ дељиви су са 77

$$= \{b\in\mathbb{N} \mid 77 \mid b\} = \{77k \mid k\in\mathbb{N}\}$$

22. Нека график бинарне релације $\Gamma \in \mathcal{P}(A\times B)$ задаје бинарну релацију $\rho \subset A\times B$. Показати да за сваки подскуп $X \subseteq A$ важи $X^{\rho} = \bigcap_{x\in X} \Gamma(x)$, где $\Gamma(x)$ означава засек графика Γ дуж скупа $\{x\}$.

$$\Gamma(x) = \{b\in B \mid (x,b)\in\Gamma\}$$

$$X^{\rho} = \{b\in B \mid X\rho\{b\}\} \overset{?}{=} \bigcap_{x\in X}\Gamma(x)$$

$$b\in X^{\rho} \iff X\rho\{b\} \iff (\forall x\in X)\ \{x\}\rho\{b\} \iff (\forall x\in X)\ x\rho b$$

$$\iff (\forall x\in X)\ (x,b)\in\Gamma$$

$$\iff (\forall x\in X)\ b\in\Gamma(x)$$

$$\iff b\in\bigcap_{x\in X}\Gamma(x)$$