Понедељак 19.04.2021.

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ је ограничено $\forall x\in\mathbb{R}$

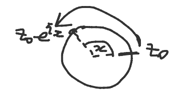
$C_n=\sum_{k=1}^{n} \cos kx$ је огр. $\forall x\neq 2l\pi,\ l\in\mathbb{Z}$

$\exists M_1, M_2>0$

$\forall n\in\mathbb{N}: |S_n|\le M_1$

$\forall n\in\mathbb{N}: |C_n|\le M_2$

$$C_n+iS_n=\sum_{k=1}^{n}(\cos kx+i\sin kx)=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{e^{ikx}}_{=(e^{ix})^k}=e^{ix}\left(1+e^{ix}+\dots+(e^{ix})^{n-1}\right)=$$



1° $e^{ix}\neq 1$: $x\neq 2l\pi$

$$|C_n+iS_n|=\left|e^{ix}\cdot\frac{1-e^{ixn}}{1-e^{ix}}\right|=\left|\frac{1-e^{ixn}}{1-e^{ix}}\right|\le\frac{1+\overbrace{|e^{ixn}|}^{=1}}{|1-e^{ix}|}=\underbrace{\frac{2}{|1-e^{ix}|}}_{=M}<\infty$$

$|e^{ix}|=1$

$|C_n+iS_n|=\sqrt{C_n^2+S_n^2}$

$\Rightarrow C_n^2+S_n^2\le M^2 \Rightarrow |C_n|\le M$ и $|S_n|\le M \Rightarrow$ огр.

2° $x=2l\pi$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\overbrace{\sin(\underbrace{2kl\pi}_{\in\mathbb{Z}})}^{=0}=0$ ✓ огр.

$C_n=\sum_{k=1}^{n}\cos(\underbrace{2kl\pi}_{\in 2\mathbb{Z}})=\sum_{k=1}^{n}\overbrace{\cos(0)}^{=1}=n \leftarrow$ није огр.

[2,3] a_n – низ комплексних бројева

b_n – монотон низ реалних бројева

(Д1) Низ $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ је ограничен.

(Д2) $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

(А1) Ред $\sum a_n$ конв.

(А2) $\exists \lim_{n\to\infty} b_n\in\mathbb{R}$ (може и само да је b_n ограничен)

(А1) $\Rightarrow$ (Д1)

(Д2) $\Rightarrow$ (А2)

[2] (Дирихлеов критеријум) (Д1) и (Д2) $\Rightarrow \sum a_n\cdot b_n$ конв.

[3] (Абелов критеријум) (А1) и (А2) $\Rightarrow \sum a_n\cdot b_n$ конв.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n}$ – испитати апсолутну и условну конв.

$\frac{\sin n}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sin n$ (Д1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ огр? (по зад 1 важи) ✓

$a_n=\sin n$ (Д2) b_n монотон? $\frac{1}{n}\searrow$

$k=1$

$a_n = \sin n$

$b_n = \frac{1}{n}$

(Д2) b_n монотон? $\frac{1}{n} \searrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

Дир.
$\Rightarrow \sum \frac{\sin n}{n}$ конв.

$\sin^2 n = \frac{1-\cos 2n}{2}$

$\sum \left|\frac{\sin n}{n}\right|$?

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| = \frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1-\cos 2n}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2n}{2n}$$

$\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum\frac{1}{n} = \infty$ див.

$\sum \frac{\cos 2n}{2n} = \sum \underbrace{\cos(2n)}_{a_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{2n}}_{b_n}$ конв.

(Д1) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ је огр. ✓ ($x=2$ у ①)

(Д2) $\frac{1}{2n} \searrow 0$ ✓

$\Rightarrow \sum\left(\frac{1}{2n} - \frac{\cos 2n}{2n}\right)$ див. $\Rightarrow \sum \frac{\sin^2 n}{n}$ див.

ПК

$\sum \left|\frac{\sin n}{n}\right| = \infty$

$\Downarrow$

$\sum \frac{\sin n}{n}$ не конв. апсолутно

$\Rightarrow \sum \frac{\sin n}{n}$ УК

домаћи: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\log n}$

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin(n)\cdot\cos\left(n+\frac{1}{n}\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ АК и УК

$$\sin(n)\cdot\cos\left(n+\frac{1}{n}\right) = \sin(n)\cdot\left(\cos(n)\cdot\cos\frac{1}{n} - \sin(n)\cdot\sin\frac{1}{n}\right) = \sin n\cdot\cos n\cdot \underbrace{\cos\frac{1}{n}}_{\to 1} - \underbrace{\underbrace{\sin^2 n}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\sin\frac{1}{n}}_{\to 0}}_{\to 0}$$

$\xrightarrow{n\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \sin n\cdot\cos n = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n)$ $\nexists$

за вежбу: $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \sin(n)$

$\alpha<0$: општи члан $a_n \not\to 0$ јер

$\Rightarrow$ ни не постоји $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{-\alpha}\cdot\sin n\cdot\cos\left(n+\frac{1}{n}\right)\right)$!

$\alpha=0$: исто див. $\Rightarrow \sum a_n$ див $\Rightarrow \sum |a_n|$ див

$\alpha>0$: $a_n\to 0$

$\alpha > 0$: $a_n \to 0$

$$a_n = \frac{\sin 2n}{2n^\alpha}\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\sin^2 n}{n^\alpha}\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\alpha>1: \quad |a_n| \le \left|\overbrace{\frac{\sin 2n}{2n^\alpha}\cos\left(\frac{1}{n}\right)}^{\le 1}\right| + \left|\overbrace{\frac{\sin^2 n}{n^\alpha}\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)}^{\le 1}\right| \le \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^\alpha}$$

$$\sum \frac{3}{2}\frac{1}{n^\alpha} < \infty \overset{\text{ПК}}{\Longrightarrow} \sum |a_n| < \infty \qquad (\text{АК} \Rightarrow \text{К})$$

$(\alpha > 1)$

$\to \alpha \in (-\infty, 0]$: $\sum a_n$ и $\sum |a_n|$ диб

$\to \alpha > 1$: $\sum a_n$ и $\sum |a_n|$ конв.

$\alpha \in (0,1]$?

$$a_n = \frac{\sin 2n}{2n^\alpha}\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\sin^2 n}{n^\alpha}\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{\sin^2 n}{n^\alpha}\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right) \le \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^\alpha} \sim \frac{\frac{1}{n}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

поз. член.

$$\alpha+1 \in (1,2] \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{\alpha+1}} < \infty \overset{\text{ПК}}{\Longrightarrow} \sum \frac{\sin^2 n}{n^\alpha}\sin\left(\frac{1}{n}\right) < \infty$$

$$\frac{\sin(2n)}{2n^\alpha}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\sin(2n)\cdot\frac{1}{2n^\alpha}$ → $\frac{1}{2n^\alpha} \searrow 0$

$x=2$

има огр. частични суми

$$\overset{\text{Дир.}}{\Longrightarrow} \sum \frac{\sin(2n)}{2n^\alpha} \text{ конв.}$$

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\frac{1}{n} \searrow 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{n}\right) \nearrow 1$$

(Абел) $\Rightarrow \sum \frac{\sin(2n)}{2n^\alpha}\cdot\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ конв.

$\checkmark\ a_n = \frac{\sin(2n)}{2n^\alpha}$

$b_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \checkmark$

$\Rightarrow$ за $\alpha \in (0,1]$: a_n конв.

$$|B-A| \ge |B| - |A|$$

Дали $\alpha \in (0,1]$ да ли $\sum |a_n|$ конв?

$$a_n = \frac{\sin(2n)}{2n^\alpha}\cdot\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\sin^2 n}{n^\alpha}\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$|a_n| \ge \left|\frac{\sin(2n)}{2n^\alpha}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right| - \left|\underbrace{\frac{\sin^2 n}{n^\alpha}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}_{\ge 0}\right|$$

конв. (—)

Хотим да $\sum \left|\frac{\sin(2n)}{2n^\alpha}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ диб!

$\underbrace{\qquad}_{\geq 0}$ ↘ конв. ( )

Хотеме да $\sum \left|\frac{\sin(2n)}{2n^{\alpha}}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ див!

$$\left|\frac{\sin(2n)}{2n^{\alpha}}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{|\sin(2n)|}{2n^{\alpha}}\cdot\cos\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{\sin^2(2n)}{2n^{\alpha}}\cdot\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1-\cos(4n)}{4n^{\alpha}}\cdot\cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{4n^{\alpha}}\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{4n^{\alpha}}\cdot 1 \sim \frac{1}{4n^{\alpha}} \xrightarrow{\alpha\leq 1} \text{див}$$

$$\frac{\cos(4n)}{4n^{\alpha}}\cdot\cos\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \text{конв.}$$

Дирихле

Абел

див

ПК

$\sum \left|\frac{\sin(2n)}{2n^{\alpha}}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ див.

ПК

$\sum |a_n|$ див.

$\Rightarrow \sum a_n$ УК

Коначно: 1° $\alpha \leq 0$: див.

2° $\alpha \in (0,1]$: УК

3° $\alpha > 1$: АК

(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \operatorname{arctg}(n+\frac{1}{n})}{\log^2 n}$

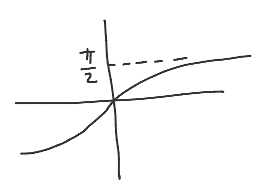
$\sum \frac{\sin(n)}{\log^2 n}$ конв. зар (Дирихле) : (Д,1) $\sum_{n=1}^{N} \sin n$ огр.

(Д,2) $\frac{1}{\log^2 n} \searrow 0$

$\sum \frac{\sin(n)}{\log^2 n}\cdot \operatorname{arctg}(n+\frac{1}{n})$ конв. зар (Абел) : (А1) $\sum \frac{\sin(n)}{\log^2 n}$ конв ✓

(А2) $\operatorname{arctg}(n+\frac{1}{n})$ монотон и $\exists \lim_{n\to\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\left(n+\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} \quad ✓$$



$f(x) = x + \frac{1}{x}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} > 0$ за $x > 1$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $n \geq 2$ за $n+\frac{1}{n}$ монотон ↗

$\Rightarrow \operatorname{arctg}(n+\frac{1}{n})$ монотон ↗ ✓

⇒ имамо обичну К

АК?

$$|a_n| = \left|\frac{\sin(n)\cdot \operatorname{arctg}(n+\frac{1}{n})}{\log^2 n}\right| \geq \frac{|\sin n|}{\log^2 n}\cdot \operatorname{arctg} 2 \geq \operatorname{arctg} 2\cdot \frac{\sin^2 n}{\log^2 n} = \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\cdot \underbrace{\frac{1-\cos 2n}{\log^2 n}}_{\text{див.}} \dots$$

$n=1$

$\Rightarrow \sum |a_n|$ див.

$\Rightarrow \sum a_n$ УК

(5) $\sum \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{n!\, e^n}{n^{n+p}}}_{a_n}$

Стирлинг

$$|a_n| = \frac{n!\cdot e^n}{n^{n+p}} \sim \frac{\sqrt{2n\pi}\cdot n^n \cdot \frac{e^n}{e^n}}{n^n \cdot n^p} \sim \sqrt{2\pi}\cdot \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$$

$p > \frac{3}{2}$: $\sum |a_n| < \infty \Rightarrow \sum a_n$ конв.

$p \leq \frac{3}{2}$: $\sum |a_n| = \infty$ ~~($\Rightarrow \sum a_n$ див.)~~

Имамо још и: $p \leq \frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{2\pi}\cdot \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}} = 1 \Rightarrow |a_n| \not\to 0 \Rightarrow a_n \not\to 0$

(јер: $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$)

за $p \leq \frac{1}{2}$ ред див.

Још $p \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$: $\sum |a_n|$ див.

$\sum a_n$?

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n!\, e^n}{\underbrace{n^{n+p}}_{>0}} = b_n$$

Лајбниц (спец. случај Дирихлеа $a_n = (-1)^n$, $b_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+p}}$).

$b_n > 0$. $b_n \downarrow 0$?

$$b_n \sim \frac{\sqrt{2n\pi}}{n^p} = \sqrt{2\pi}\cdot \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}} \to 0$$

b_n монотон?

$\frac{n!\, e^n}{\dots}$ Тејлор

b_n монотон?

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\dfrac{n!\,e^n}{n^{n+p}}}{\dfrac{(n+1)!\,e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} = \frac{1}{e}\cdot e^{(n+p)\cdot\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dots$$

Тејлор

$$= \dots = 1 + \frac{p-\frac{1}{2}}{n} + \frac{---}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{p-\frac{1}{2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty$$

$p-\frac{1}{2}>0$: асимптотски (почевши од неког) $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$ и $b_n \to 0$ (доказ на сл. часу)

$\Rightarrow$ b_n опадајући $\Rightarrow$ имамо Лајбница $\Rightarrow$ УК

Домаћи: (испитати условну и апсолутну конв., $\alpha\in\mathbb{R}$)

1. $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$
2. $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$
3. $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}$
4. $\sum (-1)^n \cdot \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \cos\frac{1}{n^2}$
5. $\sum \frac{(-1)^n}{n} e^{-\frac{1}{n}}$
6. $\sum \frac{\cos\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)\right)}{\sqrt{n}}$
7. $\sum \frac{\alpha^n \cdot n^n \cdot n!}{(2n)!}$