Петак 19.03.2021.

(1) Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\dfrac{\sqrt[n]{e}+1}{\sqrt[n]{e}-1}-2n\right)$.

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}-2x\right)$$

покушали до 2. степена

$$\left(e^{1/n}-1\right)^{-1}=\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)^{-1}=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-1}=\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}=$$

$$=n\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=n\cdot\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=n-\frac{1}{2}+o(1),\ n\to\infty$$

$$\left(e^{1/n}+1\right)\left(e^{1/n}-1\right)^{-1}=\left(2+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(n-\frac{1}{2}+o(1)\right)=2n-1+1-\frac{1}{2n}+o(1)=2n+o(1),\ n\to\infty$$

$$n\cdot\left(\frac{e^{1/n}+1}{e^{1/n}-1}-2n\right)=n\cdot\left(2n+o(1)-2n\right)=n\cdot o(1)=\underline{o(n)},\ n\to\infty$$

одавде не можемо lim да нађемо!

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{n}\to\infty\\ 1\to 1\\ \frac{1}{n}\to 0\end{array}\right\}\ ?$$

Сад идемо до 3. степена

$$\left(e^{1/n}-1\right)^{-1}=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^{-1}=n\cdot\Bigg(1+\overbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}^{t}\Bigg)^{-1}=$$

$$=n\cdot\left(1-t+t^2+o(t^2)\right)=n\cdot\left(1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{4n^2}\right)=n-\frac{1}{2}+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty$$

$$\left(e^{1/n}+1\right)\left(e^{1/n}-1\right)^{-1}=\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(n-\frac{1}{2}+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=2n-\cancel{1}+\frac{1}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+\cancel{1}-\cancel{\frac{1}{2n}}+\frac{1}{12n^2}+\cancel{\frac{1}{2n}}-\frac{1}{4n^2}=$$

$$=2n+\frac{1}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty$$

$$n\cdot\left(\frac{e^{1/n}+1}{e^{1/n}-1}-2n\right)=n\cdot\left(2n+\frac{1}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-2n\right)=\frac{1}{6}+o(1),\ n\to\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{e^{1/n}+1}{e^{1/n}-1}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)=\frac{1}{6}.$$

Асимптоте ф-ја

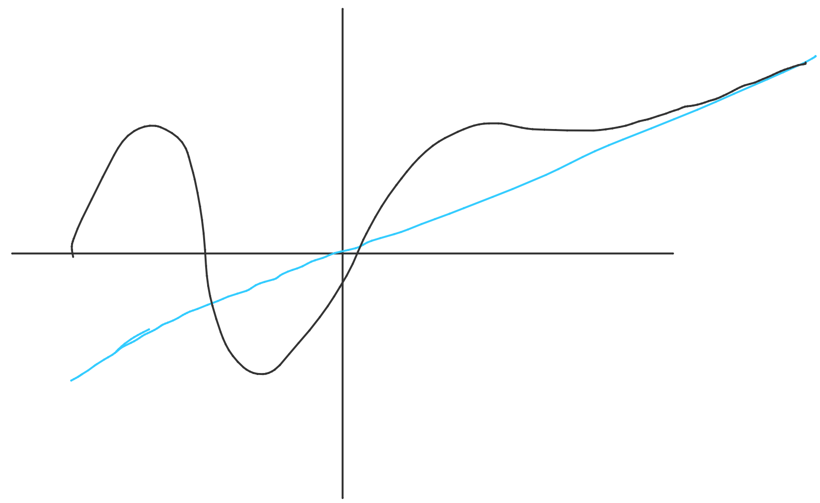
$f: A \to \mathbb{R}$, $(a, +\infty) \subseteq A$, $a \in \mathbb{R}$

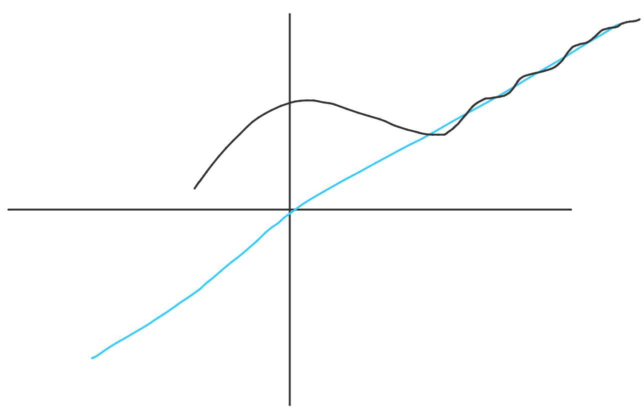
Ако $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (kx+n)\big) = 0 \Rightarrow kx+n$ асимптота за f у $+\infty$

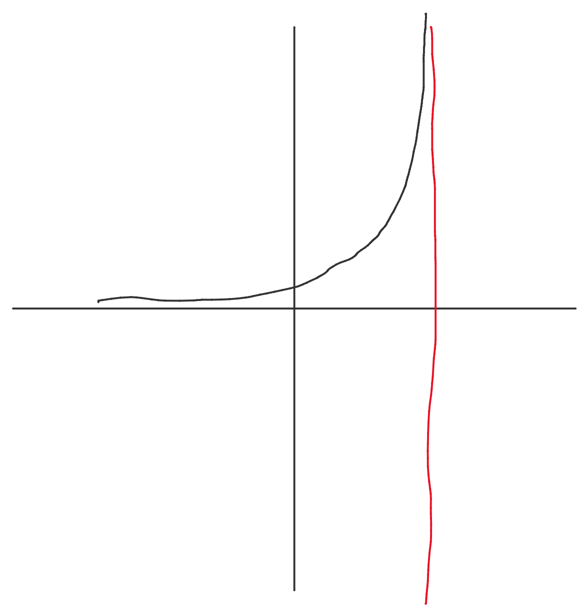
$\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x) - (kx+n)\big) = 0 \Rightarrow kx+n$ –||– $-\infty$

$k=0$: зове се хоризонтална

$k\neq 0$: зове се коса







Ако $\lim\limits_{x\to b+} f(x) = \pm\infty$ → вертикална

пр. $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$\pm\infty$: $2x$ асимпт. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - 2x\big) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 2x$ је ас. у $+\infty$ и у $-\infty$

вертикалне? $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$ $\Rightarrow x=0$ је верт. ас.

вертикалне? $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow$ $x=0$ је верт. ас.

За косе/хор: $\underline{kx+n}$

1° $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

$n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$

2° $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\to\pm\infty$ $\left(f(x) = \alpha x + \beta + o(1),\ x\to\pm\infty \right)$

$\Rightarrow \alpha x + \beta$ асимптота

↳ даље шта каже γ? нпр. $x\to\infty$:

$\gamma > 0 \Rightarrow f$ изнад $\alpha x + \beta$

$\gamma < 0 \Rightarrow f$ испод $\alpha x + \beta$

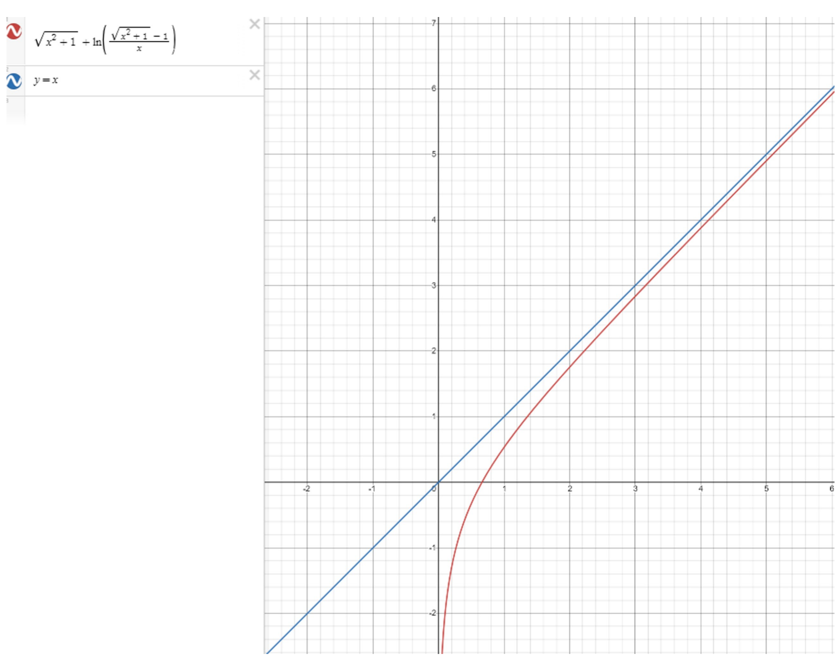
прошли час:

$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$:

$$f(x) = x + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\to\infty$$

$a=1,\ b=0,\ c=-\frac{1}{2}$

$y=x$ коса асимпт. за $x\to\infty$ и даље f се приближава одоздо



верт? $x \to 0$

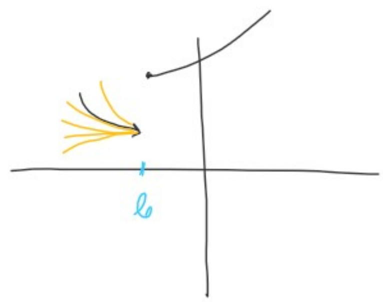
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 + \lim_{x\to 0+} \log \underbrace{\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)}_{\to 0} = -\infty \Rightarrow x=0 \text{ је верт. асимпт.}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1}{x} = \frac{1}{2}x + o(x) \to 0, \ x\to 0+$$

још видети $f(x) = ax+b+\frac{c}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ за $x\to-\infty$ ...

како функција улази у тачку?

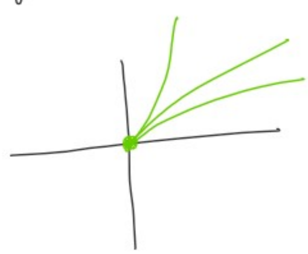


$$\exists \lim_{x\to b^-} f(x) < \infty$$

гледамо

$$\lim_{x\to b^-} f'(x) \qquad \left(\text{или } f'_-(b)\right)$$

пр. Нацртати ф-ју $f(x) = x^{2/3}$ у десној околини нуле



$x \in (0,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$

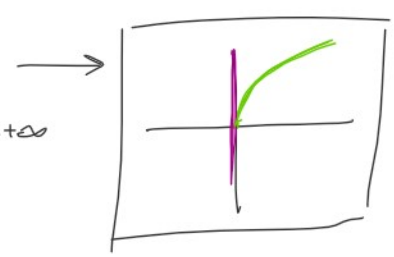
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = 0$$

$$f(x) > 0, \ x>0$$

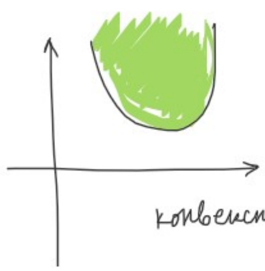
под којим углом?

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

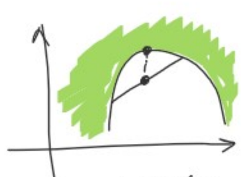
$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^3} = +\infty$$



Конвексност



конвексна



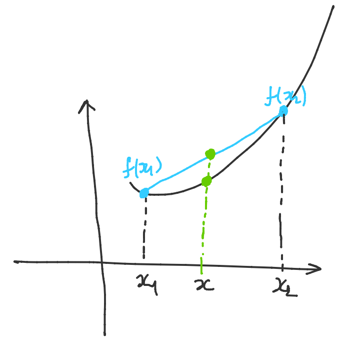
конкавна

конвексна	конкавна

Деф. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ је конвексна (конкавна) ако $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ и $\forall\lambda\in[0,1]$

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

$$\left(f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\right)$$



$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$

$$\lambda=\frac{x_2-x}{x_2-x_1} \Rightarrow \boxed{\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}}$$

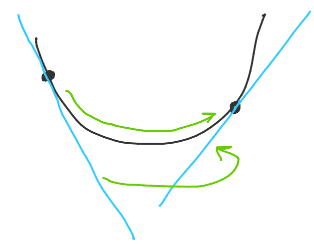
T f конвексна $\Leftrightarrow$ пресликавање $t\mapsto \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$, $t\ne a$ је неопадајућа

f конкавна $\Leftrightarrow$ —||— нерастућа

(*) Ако је f диференцијабилна (ово нападнемо лимесом $\lim\limits_{x\to x_1+} \wedge \lim\limits_{x\to x_2-}$):

$$f'_-(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\le f'_+(x_2)$$



(2) Ако је $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ конвексна диф. ф-ја, доказати $\forall x\in(a,b)$, $f(x)=\max\limits_{t\in(a,b)}\left(f(t)+f'(t)\cdot(x-t)\right)$.

$x\in(a,b)$ произв

$t\in(a,b)$ произв

$f(x)-f(t)=f'(c)\cdot(x-t)$ ← Лагранжова Т (*), $c\in(x,t)$ $\vee$ $c\in(t,x)$

T $\Rightarrow$ f' неопадајућа

1° $x<t$, $c\in(x,t)$, $x<c<t$ $\Rightarrow$ $f'(c)\le f'(t)$

2° $t<x$, $c\in(t,x)$, $t<c<x$ $\Rightarrow$ $f'(c)\ge f'(t)$

$$(t-x)(f'(t)-f'(c))\ge 0$$

$$f'(t)\cdot(t-x)\ge f'(c)\cdot(t-x) \quad /\cdot(-1)$$

$$f'(t)(x-t)\le f'(c)\cdot(x-t) \quad /+f(t)$$

$$f'(t)(x-t) \le f'(c)\cdot(x-t) \quad /+f(t)$$

$$g(t) = f(t) + f'(t)\cdot(x-t) \le \underbrace{f'(c)\cdot(x-t)} + f(t) \overset{(*)}{=} \underbrace{f(x)-f(t)} + f(t) = f(x)$$

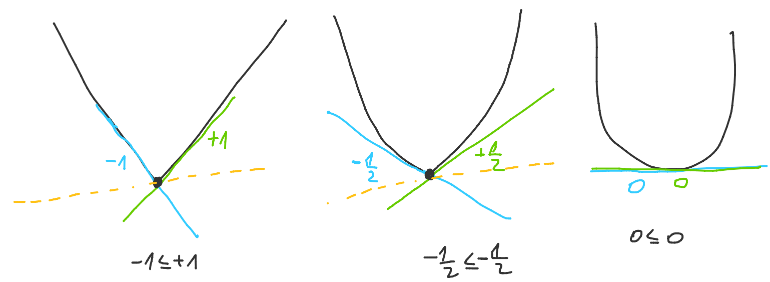
$\Rightarrow$ $g(t)$ je ограничена одозго са $f(x)$

$t=x$, $g(t)=g(x)=f(x)$ $\Rightarrow$ то је $\underline{\underline{\max}}$

$$\Rightarrow f(x) = \max_{t\in(a,b)} g(t)$$

За конкавне? $f(x) = \min\limits_{t\in(a,b)} \left(f(t) + f'(t)\cdot(x-t)\right)$ ← допашти (T ⇒ f' нерастућа)

$\boxed{T}$ f конвексна $\Rightarrow$ $(\forall x)$ $\quad f'_-(x) \le f'_+(x)$



③ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ конвексна

$c\in(a,b)$ и $k\in\left(f'_-(c), f'_+(c)\right)$

Онда је f изнад праве $y = f(c)+k(x-c)$.