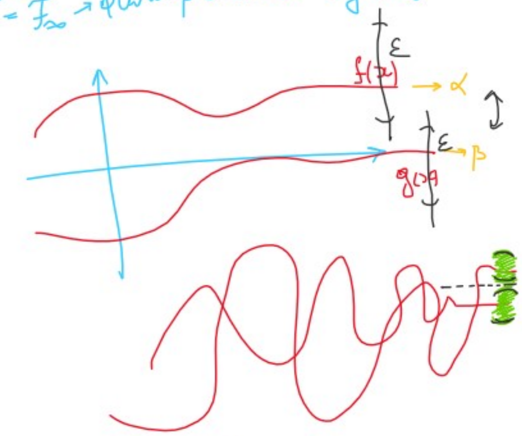
Петак 18.12.2020.

(17) Нека је $f, g : S \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{\mathcal{F}} f = \alpha$, $\lim\limits_{\mathcal{F}} g = \beta$.
$\mathcal{F}$ филтер на $S$

Тада је

пр. $S = \mathbb{R}$

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty \to$ филтер околина од $+\infty$




МОТИВАЦИЈА

Додатни: (3) $\alpha < \beta \Rightarrow \{x \in S : f(x) < g(x)\} \in \mathcal{F}$

$\lim\limits_{\mathcal{F}} f = \alpha \iff (\forall \varepsilon > 0)\ \{x \in S \mid |f(x) - \alpha| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$

$\lim\limits_{\mathcal{F}} g = \beta \iff (\forall \varepsilon > 0)\ \{x \in S \mid |g(x) - \beta| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$

узмемо $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2}$ у обе деф.

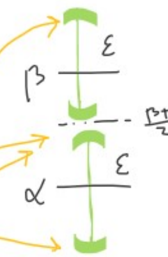
$f(x) \in \left(\alpha - \frac{\beta-\alpha}{2}, \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}\right) = \left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$A = \{x \in S \mid |f(x) - \alpha| < \frac{\beta - \alpha}{2}\} \in \mathcal{F}$

$B = \{x \in S \mid |g(x) - \beta| < \frac{\beta - \alpha}{2}\} \in \mathcal{F}$

$\stackrel{(F3)}{\Longrightarrow} A \cap B \in \mathcal{F}$

$g(x) \in \left(\beta - \frac{\beta - \alpha}{2}, \beta + \frac{\beta - \alpha}{2}\right) = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{3\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$




идеја: узети $\varepsilon > 0$ т.д. ова два инт. не секу

$\varepsilon \leq \frac{\beta - \alpha}{2}$

$A \cap B = \{x \in S \mid \underbrace{f(x) \in \left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \wedge g(x) \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{3\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}_{\Downarrow\ f(x) < g(x)}\} \subseteq \{x \in S \mid f(x) < g(x)\}$

$A \cap B \in \mathcal{F} \stackrel{(F3)}{\Longrightarrow} \{x \in S \mid f(x) < g(x)\} \in \mathcal{F}$

(2) **Став:** (Домаћи) $f: S \to \mathbb{C}$, $S \subseteq \mathbb{R}, \subseteq \mathbb{C}$, $s \in S'$.

Сл. тврђ. су екв:

а) $\lim\limits_{x\to s} f(x) = \xi$

б) За сваки низ $x_n \in S$ важи

$$x_n \to s,\ n\to+\infty \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \xi$$

в) $(\forall \varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in S)$

$$0<|x-s|<\delta \Rightarrow |f(x)-\xi|<\varepsilon$$

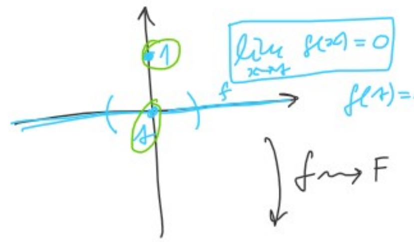
г) ф-ја $F: S\cup\{s\}\to\mathbb{C}$

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq s\\ \xi, & x=s\end{cases}$$

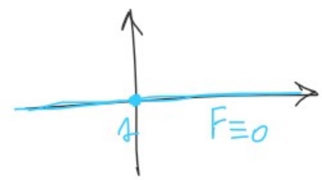
је непрекидна у тачки $s$.

(88) а) $\Leftrightarrow$ б)

(86) а) $\Leftrightarrow$ в)




$\lim\limits_{x\to s} f(x)=\xi$




г) $F$ непр. у $s$: $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in S)$ $|x-s|<\delta \Rightarrow \underbrace{|F(x)-F(s)|<\varepsilon}_{|F(x)-\xi|<\varepsilon}$

$\boxed{Г\Rightarrow В}$ $|x-s|<\delta \Rightarrow |F(x)-\xi|<\varepsilon$

$x\neq s$: $F(x)=f(x) \rightsquigarrow$ $0<|x-s|<\delta \Rightarrow |f(x)-\xi|<\varepsilon$

$\uparrow$ $x\neq s$

$\boxed{В\Rightarrow Г}$ знамо: $\underbrace{0<|x-s|<\delta}$ $\Rightarrow |f(x)-\xi|<\varepsilon$ ↳ овде је $f(x)=F(x)$ $\}$ $0<|x-s|<\delta \Rightarrow |F(x)-\xi|<\varepsilon$

$x=s$: $|F(s)-\xi|=|\xi-\xi|=0<\varepsilon$ ✓

важи: $|x-s|<\delta \Rightarrow |F(x)-\xi|<\varepsilon$ ✓

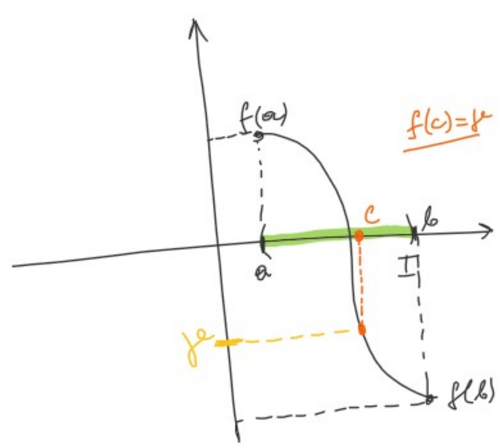
**Теорема:** Нека је $I\subseteq\mathbb{R}$ ! интервал, $f\in C(I;\mathbb{R})$ (непр. ф-ја $f:I\to\mathbb{R}$)

Тада важи:

(1) $f(I)$ је интервал

(2) Ако су $a,b\in I$ и $\gamma$ неки број између $f(a)$ и $f(b)$ тада $\exists c$ између $a$ и $b$ за које важи $f(c)=\gamma$.

Теорема о међувредности

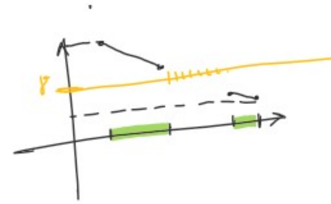



$f(a)<\gamma<f(b)$

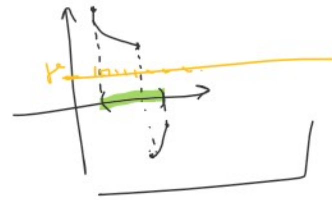
$\neg$ ! $I$ није интервал:

или

$f(b) < \gamma < f(a)$




! $f$ непр:

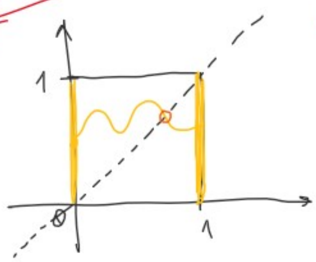



③ (Брауерова Т о фиксној тачки)

$f:[0,1]\to[0,1]$ непр, онда $(\exists c\in[0,1])\ \underline{f(c)=c}$.

фиксна тачка

битно!




интервал

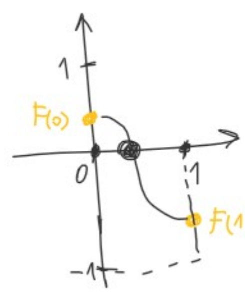
$F:[0,1]\to\mathbb{R}$

$F(x)=f(x)-x$

$F(0)=f(0)-0=f(0)\in[0,1]$

$F(1)=\underbrace{f(1)}_{\in[0,1]}-1\in[-1,0]$

F је непр. као разлика 2 непр!




1° $F(0)=0$

$f(0)-0=0 \Rightarrow \underline{f(0)=0}$ $(c=0)$

2° $F(1)=0$

$f(1)-1=0 \Rightarrow f(1)=\underline{1}$ $(c=1)$

3° $F(0)\neq 0 \wedge F(1)\neq 0 \Rightarrow F(0)>0>F(1)$

$\gamma=0$: $(\exists c\in[0,1])\ F(c)=0$

(Т о МВ)

$\Downarrow$

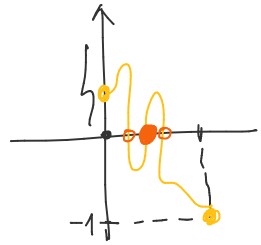
$f(c)-c=0$

$\Downarrow$

$\boxed{f(c)=c}$

(4) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ непрекидна

Доказати $(\exists c \in [0,1]) \quad (1-c)\cdot f^2(c) = c.$




Уочимо $F: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = (1-x)\cdot f(x)^2 - x \quad \to \text{непр.}$$

$$F(0) = 1\cdot f(0)^2 - 0 = f(0)^2 \geq 0$$

$$F(1) = 0 - 1 = -1$$

1° $F(0)=0 \Rightarrow c=0$

2° $F(0)>0 \Rightarrow F(1) < 0 < F(0)$

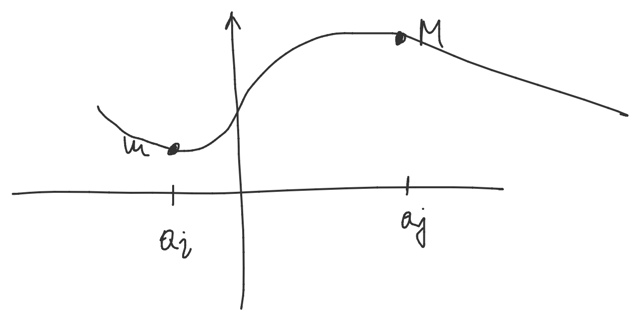
$\gamma = 0: \ (\exists c \in [0,1]) \ F(c) = 0$

$$(1-c) f(c)^2 - c = 0 \Rightarrow (1-c) f(c)^2 = c.$$

(5) $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ непр.

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\exists c \in \mathbb{R}) \quad f(c) = \sqrt[n]{f(a_1)\cdot \ldots \cdot f(a_n)}$

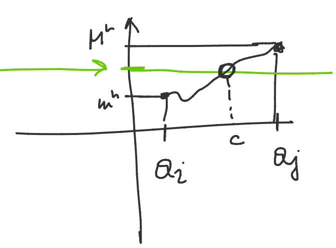



$f(a_1), \dots, f(a_n) > 0$

$(\exists i) \quad f(a_i) = \min\limits_{1 \leq k \leq n} f(a_k) = m$

$(\exists j) \quad f(a_j) = \max\limits_{1 \leq k \leq n} f(a_k) = M$

$$m^n = \underbrace{m\cdot \ldots \cdot m}_{n} \leq \boxed{\underbrace{f(a_1)}_{\substack{\geq m \\ \leq M}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{f(a_n)}_{\substack{\geq m \\ \leq M}}} \leq \underbrace{M\cdot \ldots \cdot M}_{n} = M^n$$




$F(x) = f(x)^n$ — непр.

$F(a_i) = f(a_i)^n = m^n$

$F(a_j) = f(a_j)^n = M^n$

$F(a_i) = f(a_i) = m$

$F(a_j) = f(a_j)^n = M^n$

$$\text{TOMB} \Rightarrow (\exists c \in [a_i, a_j]) \quad F(c) = f(a_1) \cdot \ldots \cdot f(a_n)$$

$$F(c) = f(c)^n$$

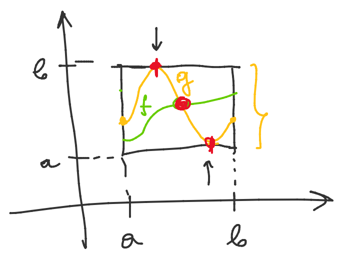
$$\Downarrow$$

$$f(c) = \sqrt[n]{f(a_1) \cdot \ldots \cdot f(a_n)}$$

⑥ $f, g : [a,b] \to [a,b]$ непр.

$g$ је сурјективна

Док. $(\exists x_0 \in [a,b])\ f(x_0) = g(x_0)$




$F(x) = f(x) - g(x)$ – непр. (јер $f, g$ непр.)

$g$ је на $\Rightarrow (\exists x_1 \in [a,b])\ g(x_1) = a$

$(\exists x_2 \in [a,b])\ g(x_2) = b$

$f(x_1), f(x_2) \in [a,b]$

$$F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = \underbrace{f(x_1) - a}_{\geq 0} \in [0, b-a]$$

$$F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = \underbrace{f(x_2) - b}_{\leq 0} \in [a-b, 0]$$

1° $F(x_1) = 0 \Rightarrow c = x_1$

2° $F(x_2) = 0 \Rightarrow c = x_2$

3° $F(x_1) \neq 0 \wedge F(x_2) \neq 0 \Rightarrow (\text{TOMB})\ (\exists c \in [a,b])\ F(c) = 0$

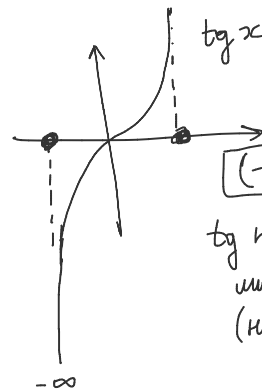
$\left.\begin{matrix} F(x_1) > 0 \\ F(x_2) < 0 \end{matrix}\right\} F = 0$ $\qquad \Downarrow$ $\qquad f(c) = g(c)$


**Теорема:** (Вајерштрасова теорема)

Нека је $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна

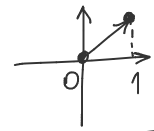
Нека је $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Тада је $f$ ограничена на свом домену и достиже свој максимум и минимум.

$m$ - мин
$M$ - макс
$(\exists x_1, x_2)$ $f(x_1) = m$
$f(x_2) = M$




$\boxed{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$

tg не достиже ни мин. ни макс.
(није ни ограничена!)




$f(x) = x$ – ограничен

$\boxed{(0,1)}$

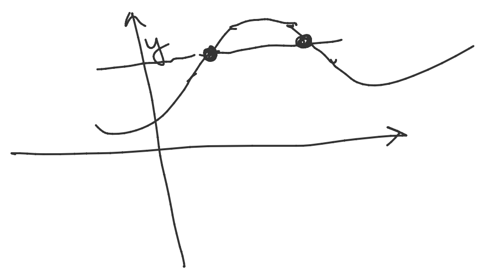
$\nexists \max_{(0,1)} f$

$\sup_{(0,1)} f = 1$

⑦ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тд. $(\forall y \in \mathbb{R})$ $f^{-1}(\{y\})$ двочлан. Доказати да $f$ није непрекидна на $\mathbb{R}$.

ппс $f$ јесте непрекидна

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\}$$



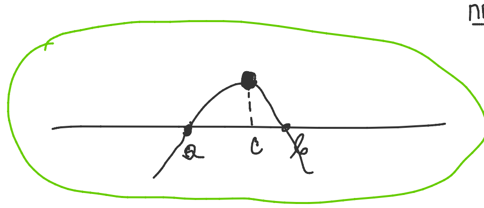

$y = 0$: $f^{-1}(\{0\}) = \{a, b\}$, $a < b$

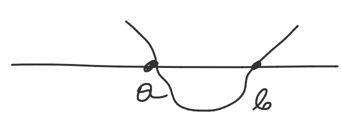
- на $(a,b)$ $f$ мора бити истог знака

ппс $\exists x_1, x_2 \in (a,b)$ $\left.\begin{matrix} f(x_1) > 0 \\ f(x_2) < 0 \end{matrix}\right\}$ (ТОМВ) $\exists c \in (a,b)$ $f(c) = 0$

$c \in f^{-1}(\{0\})$

$c \neq a, b$



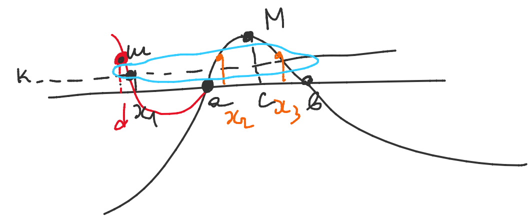




БУО, $f > 0$ на $(a,b)$

- Вајерштрасова Т на $[a,b]$:

$$(\exists c \in [a,b]) \ f(c) = \max_{[a,b]} f = M > 0$$

• $f<0$ на $(-\infty,a)$ и $(b,+\infty)$




ппс $\quad (\exists d<a)\ f(d)>0$

(буо)

$m=f(d)>0$

$K=\frac{1}{2}\min\{m,M\}>0$

ТОМВ на $a,d \Rightarrow (\exists x_1\in(d,a))\ f(x_1)=K$

$0=f(a)<K<f(d)=m$

ТОМВ на $a,c \Rightarrow (\exists x_2\in(a,c))\ f(x_2)=K$

$0=f(a)<K<f(c)=M$

ТОМВ на $c,b \Rightarrow (\exists x_3\in(c,b))\ f(x_3)=K$

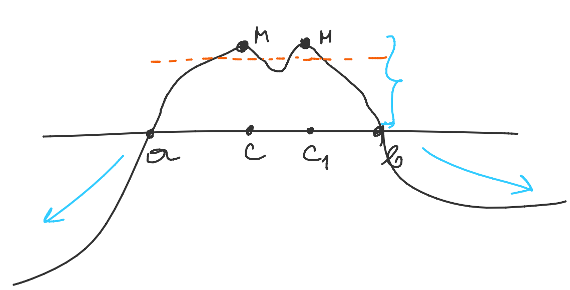
$0=f(b)<K<f(c)=M$

$(\exists x_1,x_2,x_3)\ f(x_1)=f(x_1)=f(x_3)=K$

$d<x_1<a<x_2<c<x_3$ ↯

• Следи да је $f^{-1}(\{M+1\})=\emptyset$ ↯

јер је $f\le M$.




$\Downarrow$

$f$ није непрекидна