Понедељак 16.11.2020.

56. Нека је $(A,+,\leq,0)$ уређена Абелова група и нека су $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ и $(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ коначне фамилије елемената из скупа A такве да важи $a_\lambda \leq b_\lambda$ за све $\lambda \in \Lambda$. Показати да важи

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda.$$

$$\varphi : \{0,\dots,n\} \to \Lambda$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sum_{j=0}^{n} a_{\varphi(j)}$$

Индукцијом по $\mathrm{Card}(\Lambda)$:

БАЗА: 1° $\mathrm{Card}(\Lambda)=0 \Rightarrow \Lambda=\emptyset$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = 0 = \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$$

2° $\mathrm{Card}(\Lambda)=1 \Rightarrow \varphi:\{1\}\to\Lambda$ биј.

$a_{\varphi(1)} \leq b_{\varphi(1)}$ $(\varphi(1)\in\Lambda)$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sum_{j=1}^{1} a_{\varphi(j)} = a_{\varphi(1)} \\ \quad\;\; \wedge\!\!\wedge \qquad\qquad\qquad\quad \wedge\!\!\wedge \\ \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda = \sum_{j=1}^{1} b_{\varphi(j)} = b_{\varphi(1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \checkmark$$

3° $\mathrm{Card}(\Lambda)=2 \Rightarrow \varphi:\{1,2\}\to\Lambda$ биј.

$$\begin{array}{l} \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} \\ \qquad\qquad\;\; \wedge\!\!\wedge \qquad\;\; \wedge\!\!\wedge \\ \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda = b_{\varphi(1)} + b_{\varphi(2)} \end{array} \checkmark$$

са прошлог часа!

(#) доказујемо $\left.\begin{array}{l} a \leq c \\ b \leq d \end{array}\right\} \Rightarrow a+b \leq c+d$

$a \leq c \;/+b$ $\qquad$ $b \leq d \;/+c$

$a+b \leq c+b$ $\quad$ $b+c=c+b$ $\quad$ $b+c \leq d+c$

$a+b \leq b+c \leq d+c$

$\overset{T}{\Rightarrow} a+b \leq c+d$

ХИПОТЕЗА: Важи зад. за било које $\mathrm{Card}(\Lambda)=k$ елемената.

КОРАК: Доказујемо за $k+1$ елемената. $(\mathrm{Card}(\Lambda)=k+1)$.

$\varphi:\{1,\dots,k+1\}\to\Lambda$ бијекција

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda \;?$$

$\psi = \varphi|$, $\quad$, $\quad \psi:\{1,\dots,k\}\to\varphi(\{1,\dots,k\})$ бијекција

$\psi = \varphi|_{\{1,\dots,k\}}$, $\psi : \{1,\dots,k\} \to \varphi(\{1,\dots,k\})$ бијекција

$$\sum_{\lambda \in \varphi(\{1,\dots,k\})} a_\lambda = \sum_{j=1}^{k} a_{\psi(k)}$$

$(\varphi(k))$

$$\sum_{\lambda \in \varphi(\{1,\dots,k\})} b_\lambda = \sum_{j=1}^{k} b_{\psi(k)}$$

$\forall j \in \{1,\dots,k\}$

$\underbrace{a_{\psi(j)} \le b_{\psi(j)}}_{(a_\lambda \le b_\lambda)} \xRightarrow[k \text{ елем.}]{\text{ХИПОТЕЗА}} \sum_{j=1}^{k} a_{\psi(k)} \le \sum_{j=1}^{k} b_{\psi(k)}$

још знамо $a_{\varphi(k+1)} \le b_{\varphi(k+1)}$ додајемо!

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{j=1}^{k+1} a_{\varphi(j)} = \sum_{j=1}^{k} a_{\psi(k)} + a_{\varphi(k+1)} \le \sum_{j=1}^{k} b_{\psi(k)} + b_{\varphi(k+1)} = \sum_{j=1}^{k+1} b_{\varphi(j)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \quad \checkmark$$

из БАЗЕ за $k=2$!

57. Нека је $(A, +, \le, 0)$ уређена Абелова група и нека су $m \in \mathbb{Z}$ и $a \in A$ произвољни. Показати да важи

$$ma = 0 \Leftrightarrow \underbrace{m = 0}_{0 \in \mathbb{Z}} \vee \underbrace{a = 0}_{0 \in A}.$$

$\to$ неутрал у групи

$$ma = \begin{cases} \underbrace{a + a + \dots + a}_{m}, & m \in \mathbb{N} \\ -(\underbrace{a + \dots + a}_{-m}), & m \in -\mathbb{N} \\ 0, & m = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $m = 0 \vee a = 0 \overset{?}{\Rightarrow} ma = 0$ (важи у било којој Абеловој групи)

1° $m = 0 \Rightarrow ma = 0$ ✓

2° $a = 0$, 2.1° $m \in \mathbb{N}$

$$ma = \underbrace{0 + \dots + 0}_{m} = 0$$

2.2° $m \in -\mathbb{N}$

$$ma = -(\underbrace{0 + \dots + 0}_{-m}) = -0 = 0$$

2.3° $m>0$

$ma = 0$ ✓

$\boxed{\Rightarrow}$ идеја – гледамо у зависности од $a \in A$

$ma = 0 \Rightarrow a=0 \vee \underline{m=0}$

1° $a=0$ ✓

2° $\underline{a \neq 0}$ → циљ нам је да добијемо да $\underline{m=0}$

2.1° $\underline{a>0}$ користимо!

2.1.1° $\underline{m>0}$, $(m \in \mathbb{N})$

$$m\begin{cases} a>0 \\ a>0 \\ \vdots \\ a>0 \end{cases} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \underbrace{a+\dots+a}_{m} > \underbrace{0+\dots+0}_{m}$$

$$\Downarrow$$

$$0 = ma > 0 \ \lightning$$

2.1.2° $\underline{m<0}$

$$-m\begin{cases} -a<0 \\ -a<0 \\ \vdots \\ -a<0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(-a)+(-a)+\dots+(-a)}_{-m} < \underbrace{0+\dots+0}_{-m}$$

$$(-m)(-a) < 0$$

$$0 = ma < 0 \ \lightning$$

2.1.3° $m=0$ ✓

2.2° $\underline{a<0}$

2.2.1° $\underline{m>0}$

$$m\begin{cases} a<0 \\ \vdots \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{a+a+\dots+a}_{m} < \underbrace{0+\dots+0}_{m}$$

(*) адаптирамо задатак:

Нека је $(A,+,\le,0)$ уређена Абелова група и нека су $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ и $(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ коначне фамилије елемената из скупа A такве да важи $a_\lambda < b_\lambda$ за све $\lambda \in \Lambda$. Показати да важи $, \Lambda \neq \emptyset$

$$\boxed{\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda < \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda}.$$

једино што у доказу треба изменити је БАЗА за $k=2$!

треба: $\left.\begin{matrix} a<c \\ b<d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b<c+d$

$$\left.\begin{matrix} a<c \ /{+b} \overset{(*)}{\Rightarrow} a+b<c+b \\ b<d \ /{+c} \overset{(*)}{\Rightarrow} b+c<d+c \end{matrix}\right\} a+b<d+c$$

зашто ово важи (*)?

$$\left.\begin{matrix} a<c \Rightarrow a\le c \Rightarrow a+b\le c+b \\ \text{ППС – не важи } a+b<c+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b=b+c$$

$$\Downarrow$$

$$a=c \ \lightning$$

$$m\left\{\begin{array}{l}\vdots\\ a<0\end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{a+a+\dots+a}_{m} < \underbrace{0+\dots+0}_{m}$$

$$0 = ma < 0 \ \lightning$$

2.2.2° $m<0$

$$-m\left\{\begin{array}{l}a<0\\ \vdots\\ a<0\end{array}\right. \Rightarrow 0=(-m)\cdot a < \underbrace{0+\dots+0}_{-m} = 0 \ \lightning$$

2.2.3° $m>0$ ✓

Деф: ТОТАЛНО УРЕЂЕНА АБЕЛОВА ГРУПА је $(A, \leq, +, 0)$ за коју важи

(1) $(A, +, 0)$ је Абелова група – исто

(2) $(A, \leq)$ је тотално уређен скуп
$/(\forall a, b \in A)\ \underline{a \leq b} \vee \underline{b \leq a}/$

(3) $(\forall a \in A)\ \tau_a : (A, \leq) \to (A, \leq)$ је аутоморфизам ($+$ и $\leq$ су сагласни).

} исто

$(A, +, \leq, 0)$ тот. ур. Аб. гр.

За $a \in A$ дефинишемо

- ПОЗИТИВАН ДЕО $a^+ := \max\{a, 0\}$
  Постоји јер је $\leq$ тотално ур.
- НЕГАТИВАН ДЕО $a^- := \max\{-a, 0\} = (-a)^+$
- АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ $|a| := \max\{-a, a\}$
- СИГНУМ (или знак елемента $a \in A$)
  $\mathrm{sgn}\, a \in \{-1, 0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$ за који важи

$a \neq 0$: $\underset{\in A}{a} = \underset{\in \mathbb{Z}}{\boxed{\mathrm{sgn}\, a}}\ \underset{\in A}{|a|}$ $(*)$ // облика ma, $m = \mathrm{sgn}\, a$

за $a = 0$: $\mathrm{sgn}\, a = 0$

$(\mathbb{Z}, +, \leq, 0)$ је ТУАГ.

$a = 5$: $a^+ = 5$, $a^- = 0$, $|a| = 5$, $\mathrm{sgn}\, a = 1$

$a = -2$: $a^+ = 0$, $a^- = 2$, $|a| = 2$, $\mathrm{sgn}\, a = -1$

$\to |a| = a^+ + a^-$

$\to a = a^+ - a^-$

$\to a^+, a^-, |a| \geq 0$ $(*)$

Домаћи: Нека је $(A, \leq, +, 0)$ тот. ур. Абелова група.

а) Доказати да је пресликавање

$$\{-1, 1\} \times A^*_+ \longrightarrow \underline{A^* = A\setminus\{0\}}$$
$$(m, x) \longmapsto mx$$

бијекција.

у смислу

$A^*_+ = \{a \in A \mid a > 0\}$

Домаћи: Нека је $(A, \leq, +, 0)$ тот. ур. Абелова група.

а) Доказати да је пресликавање

$$\{-1,1\} \times A^*_+ \longrightarrow A^* = \underbrace{A \setminus \{0\}}$$

$$\overset{\Psi}{(m, x)} \longmapsto \underset{\sim}{mx}$$

у смислу множења са ел. из $\mathbb{Z}$

бијекција.

$A^*_+ = \{a \in A \mid a > 0\}$

б) Нека су $x \in A^*_+$, $m \in \{-1,1\}$, $y \in A^*$. Доказати

$$mx = y \Leftrightarrow x = |y| \wedge m = \operatorname{sgn} y.$$

а) $\boxed{На}$: $\underbrace{a \in A^* = A \setminus \{0\}}$

$m = |a|$

$x = \operatorname{sgn} a$

$(x, m) \mapsto mx = |a| \cdot \operatorname{sgn} a \overset{(*)}{=} a.$ ✓

$1°$ $m > 0$?

знамо $m \geq 0$ $(*)$

$m = 0$? $\Rightarrow \underline{a} = \operatorname{sgn} a \cdot |a| = \operatorname{sgn} a \cdot |0| = \underline{0}$ ↯ $(*)$

$\Rightarrow m > 0$

$2°$ $\operatorname{sgn} a \in \{-1, 1\}$?

да, јер само за $a = 0$ је $\operatorname{sgn} a = 0$ $(*)$

$\boxed{1\text{-}1}$: $(x, m) \mapsto mx$, $(y, n) \mapsto ny$ $\Big\}$ $mx = ny$

$x, y \in A^*_+$. БУО ппс $\left.\begin{matrix} m = 1 \\ n = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = -y$

$\left.\begin{matrix} x + y = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right\}$ ↯

↯

$\boxed{m = n}$

$1°$ $m = n = 1$ $\quad x = y$ ✓

$2°$ $m = n = -1$ $\quad -x = -y \; / \cdot (-1)$

$x = y$ ✓

$\Rightarrow (x, m) = (y, n)$ ✓

б) $m \in \{-1,1\}$, $x \in A^*_+$, $y = A^*$

$$y = mx \iff x = |y| \wedge m = \mathrm{sgn}\, y$$

$\boxed{\Rightarrow}$

д) $\Rightarrow$ $(m,x) \mapsto mx$ бијекција

из НА: $y = mx \Rightarrow x = |y|$, $m = \mathrm{sgn}\, y$

$\boxed{\Leftarrow}$ $mx = \mathrm{sgn}\, y \cdot |y| \overset{(*)}{=} y$ ✓

Деф: ~~Архимедска група~~ $(A,\le,+,0)$ је тотално уређена Абелова група у којој важи

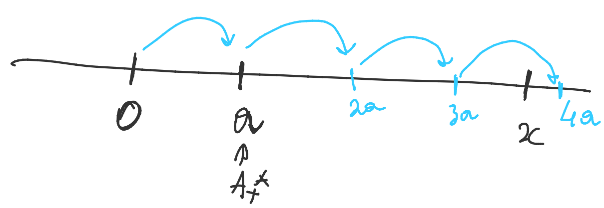
(АРХ) За свако $\boxed{a \in A^*_+}$ скуп $\mathbb{N}a := \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ није ограничен одозго

Архимедова аксиома

$$\mathbb{N}a = \{na \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a, 2a, 3a, 4a, \dots\}$$

Другим речима: $(\forall a \in A^*_+)(\forall x \in A)(\exists n \in \mathbb{N})\, \boxed{na} > x.$

$n=4$



Деф: Нека је $(A,+,\le,0)$ Архимедска група и $a \in A^*_+$. Пресликавање

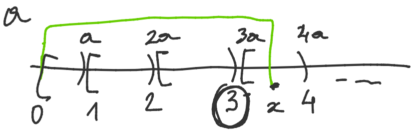
основна јединица мере (нпр. cm, in)

$[\cdot]_a : A \to \mathbb{Z}$

$x \mapsto n = [x]_a$

у A

$\boxed{x \in [na, (n+1)a)} \iff na \le x < (n+1)a$



назива се a-ЦЕЛОБРОЈАН ДЕО.

$x \mapsto [x]_a$

Јединствен број за који важи $x \in [[x]_a a, ([x]_a+1)a)$

$3a \le x < 4a$

$[x]_a = 3$

Особине:

Доказати

1. $[x]_a = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid ka \le x\}$
2. $[x+a]_a = [x]_a + 1$