Петак 16.10.2020.

6. Показати следећа својства засека

а) $\Gamma(A) = \Gamma(A \cap \pi_1\Gamma)$.

б) $(\Gamma_2 \circ \Gamma_1)(S) = \Gamma_2(\Gamma_1(S))$ за сваки подскуп $S \subset A$.

в) $\pi_1(\Gamma_2 \circ \Gamma_1) = \Gamma_1^{-1}(\pi_1\Gamma_2)$.

г) $\pi_2(\Gamma_2 \circ \Gamma_1) = \Gamma_2(\pi_2\Gamma_1)$.

д) За $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(A)$ важи $\Gamma(\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X) = \bigcup_{X\in\mathcal{A}} \Gamma(X)$.

ђ) $\Gamma(\emptyset) = \emptyset$.

е) $S \subset V \Rightarrow \Gamma(S) \subset \Gamma(V)$.

ж) $\Gamma(S \cap V) \subseteq \Gamma(S) \cap \Gamma(V)$ (на конкретном примеру показати да овде не важи увек једнакост скупова).

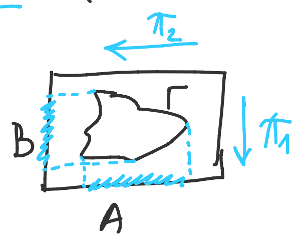
б) $(\Gamma_2 \circ \Gamma_1)(S) = \Gamma_2(\Gamma_1(S))$ , $S \subseteq A$

$c \in (\Gamma_2\circ\Gamma_1)(S) \Leftrightarrow (\exists a \in S)\ (a,c) \in \Gamma_2\circ\Gamma_1 \Leftrightarrow (\exists a \in S)(\exists b \in B)\ (a,b)\in\Gamma_1 \wedge (b,c)\in\Gamma_2$ ✓

$c \in \Gamma_2(\underbrace{\Gamma_1(S)}_{\text{скуп у } B}) \Leftrightarrow (\exists b \in \underbrace{\Gamma_1(S)}_{\subseteq B})\ (b,c)\in\Gamma_2 \Leftrightarrow (\exists a \in S)\ (a,b)\in\Gamma_1 \wedge (b,c)\in\Gamma_2$

$(\exists b \in B)$

г) $\pi_2(\Gamma_2\circ\Gamma_1) = \Gamma_2(\pi_2\Gamma_1)$




$\Gamma_2\circ\Gamma_1 \subseteq A\times C$ $\qquad$ $\pi_2\Gamma_1 \subseteq B$

$\pi_2(\Gamma_2\circ\Gamma_1) \subseteq C$ $\qquad$ $\Gamma_2(\pi_2\Gamma_1) \subseteq C$

$c \in \pi_2(\Gamma_2\circ\Gamma_1) \Leftrightarrow (\exists a\in A)\ (a,c)\in\Gamma_2\circ\Gamma_1 \Leftrightarrow (\exists a\in A)(\exists b\in B)\ (a,b)\in\Gamma_1 \wedge (b,c)\in\Gamma_2$

$c \in \Gamma_2(\underbrace{\pi_2\Gamma_1}_{\text{скуп у } B \to \text{засек}}) \Leftrightarrow (\exists b \in \underbrace{\pi_2\Gamma_1}_{\subseteq B})(b,c)\in\Gamma_2 \Leftrightarrow (\exists a\in A)(\exists b\in B)\ (a,b)\in\Gamma_1 \wedge (b,c)\in\Gamma_2$

д) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ , $\Gamma(\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X) = \bigcup_{X\in\mathcal{A}}\Gamma(X)$ „$\bigcup\mathcal{A}$"

$\Gamma \subseteq A\times B$

$b \in \Gamma(\underbrace{\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X}_{\subseteq A,\ \text{засек}}) \Leftrightarrow (\exists a \in \bigcup_{X\in\mathcal{A}} X)\ (a,b)\in\Gamma$

$\Leftrightarrow (\exists a\in A)(\exists X\in\mathcal{A})\ a\in X \wedge (a,b)\in\Gamma \Leftrightarrow (\exists X\in\mathcal{A})(\exists a\in A)\ a\in X \wedge (a,b)\in\Gamma$

$\Leftrightarrow (\exists X\in\mathcal{A})(\exists a\in A)\ (a,b)\in\Gamma$

$b \in \bigcup_{X\in\mathcal{A}}\Gamma(X) \Leftrightarrow (\exists X\in\mathcal{A})\ b\in\Gamma(X) \Leftrightarrow (\exists X\in\mathcal{A})(\exists a\in X)\ (a,b)\in\Gamma$ ✓

ж) $S,V\subseteq A$ . $\Gamma(S\cap V) \boxed{\subseteq} \Gamma(S)\cap\Gamma(V)$ $\qquad$ (контрапример за $\supseteq$)

$\Rightarrow$

$b\in\Gamma(S\cap V) \Leftrightarrow (\exists a\in S\cap V)\ (a,b)\in\Gamma \Leftrightarrow (\exists a\in A)\ a\in S \wedge a\in V \wedge (a,b)\in\Gamma$

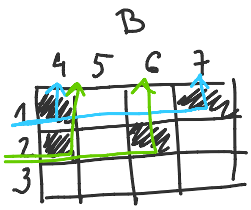
$b \in \Gamma(S \cap V) \Leftrightarrow (\exists a \in S \cap V)\ (a,b) \in \Gamma \Leftrightarrow (\exists a \in A)\ a \in S \wedge a \in V \wedge \ldots$

$\Leftrightarrow (\exists a \in A)\ \underline{a \in S \wedge (a,b) \in \Gamma} \wedge \underline{a \in V \wedge (a,b) \in \Gamma}$

$\Rightarrow \underline{b \in \Gamma(S)} \wedge \underline{b \in \Gamma(V)} \Leftrightarrow b \in \Gamma(S) \cap \Gamma(V)$

$b \in \Gamma(S) \Leftrightarrow (\exists a_1 \in S)\ (a_1, b) \in \Gamma$

$b \in \Gamma(V) \Leftrightarrow (\exists a_2 \in V)\ (a_2, b) \in \Gamma$




пр. за 2: $S = \{1,3\}$

$V = \{2,3\}$

$\Gamma(S) = \{4,7\}$

$\Gamma(V) = \{4,6\}$

$\Big\}\ \Gamma(S) \cap \Gamma(V) = \{4\}$

$\Gamma(S \cap V) = \Gamma(3) = \emptyset$

не важи $\Gamma(S) \cap \Gamma(V) \subseteq \Gamma(S \cap V)$

$\{4\} \not\subseteq \emptyset$

---

(1) ⊛ Граф у $A \times A$ ⟷ бинарна релација на $A$

симетричност: $\Gamma^{-1} = \Gamma$

рефлексивност: $\Delta_A \subseteq \Gamma$

транзитивност: $\Gamma \circ \Gamma \subseteq \Gamma$

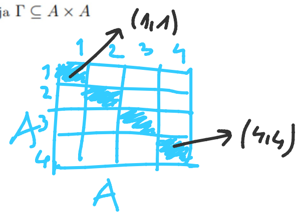
→ антисиметричност: $\Gamma \cap \Gamma^{-1} \subseteq \Delta_A$

$\boxed{\Leftrightarrow}$

8. Подсетимо се следећих дефиниција из средње школе. Кажемо да је бинарна релација $\Gamma \subseteq A \times A$

- рефлексивна ако $(\forall x \in A)(x,x) \in \Gamma$
- симетрична ако $(\forall x, y \in A)(x,y) \in \Gamma \Rightarrow (y,x) \in \Gamma$
- транзитивна ако $(\forall x, y, z \in A)(x,y) \in \Gamma \wedge (y,z) \in \Gamma \Rightarrow (x,z) \in \Gamma$
- антисиметрична ако $(\forall x, y \in A)(x,y) \in \Gamma \wedge (y,x) \in \Gamma \Rightarrow x = y$.

$\Delta_A$:




$\boxed{AC}$ $\boxed{\Rightarrow}$ $\boxed{\Gamma \cap \Gamma^{-1} \subseteq \Delta_A} \Rightarrow (\forall x,y \in A)\ \underline{(x,y) \in \Gamma \wedge (y,x) \in \Gamma} \Rightarrow x = y$

$\Delta_A = \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\}$

доказујемо импликацију

Нека су $x, y \in A$ произвољни, тд. $(x,y) \in \Gamma \wedge (y,x) \in \Gamma$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \Gamma \wedge (x,y) \in \Gamma^{-1}$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \Gamma \cap \Gamma^{-1} \Rightarrow (x,y) \in \Delta_A \Leftrightarrow x = y$

$\boxed{\Leftarrow}$ $(\forall x,y \in A)\ (x,y) \in \Gamma \wedge (y,x) \in \Gamma \Rightarrow x = y \Rightarrow \Gamma \cap \Gamma^{-1} \subseteq \Delta_A$

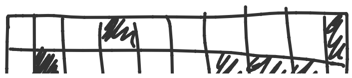
$(\Rightarrow)$

$(a,b) \in \Gamma \cap \Gamma^{-1} \Leftrightarrow (a,b) \in \Gamma \wedge (a,b) \in \Gamma^{-1} \Leftrightarrow (a,b) \in \Gamma \wedge (b,a) \in \Gamma \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow (a,b) \in \Delta_A$

- релација еквиваленције: Р, С, Т
- релација поретка: Р, АС, Т

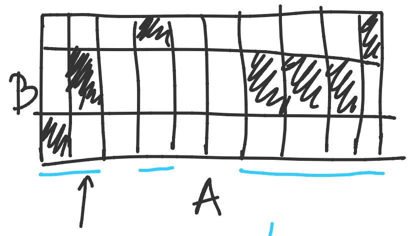
пример

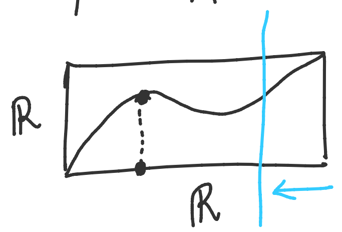


2. ... $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ је функционалан ако

Деф: График $\Gamma \in \mathcal{P}(A\times B)$ је функционалан ако је за свако $a\in A$ засек $\Gamma(a)$ празан или једночлан скуп. Тј.

$\Gamma$ је функционалан $\Leftrightarrow (\forall a\in \pi_1\Gamma)(\exists_1 b\in B)\ (a,b)\in\Gamma$




10. Да ли је график $\Gamma_1 = \{(x,|x|) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ функционалан? Да ли је график $\Gamma_2 = \{(|x|,x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ функционалан?

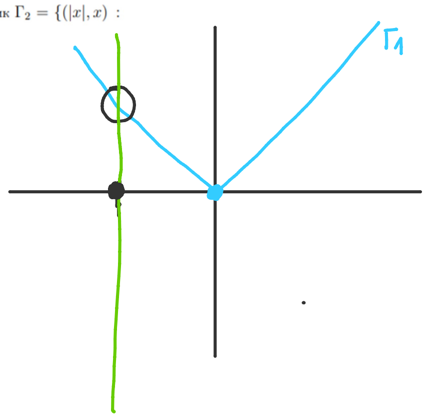
$\Gamma_1,\Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$\Gamma_1 = \{(x,|x|) \mid x\in\mathbb{R}\}$

$x\geq 0: \ (x,x)$

$x<0: \ (x,-x)$

$\pi_1\Gamma_1 = \mathbb{R}$

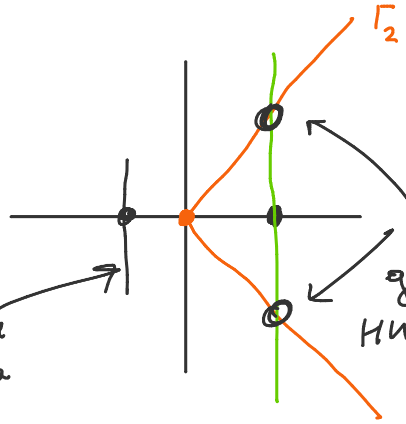



јесте функционалан!

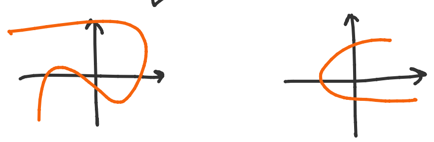
$\Gamma_2 = \{(|x|,x) \mid x\in\mathbb{R}\}$

$x\geq 0: \ (x,x)$

$x<0: \ (-x,x)$




ово није функција

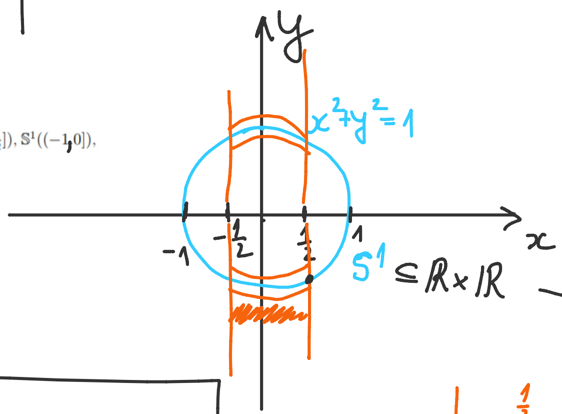


11. Нека је дат график бинарне релације

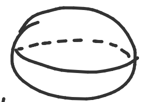
$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

(то је заправо јединична кружница у равни). Чему су једнаки следећи засеци $S^1([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$, $S^1((-1,0])$, $S^1(0)$, $S^1(50)$. Да ли је $S^1$ функционалан засек?

график

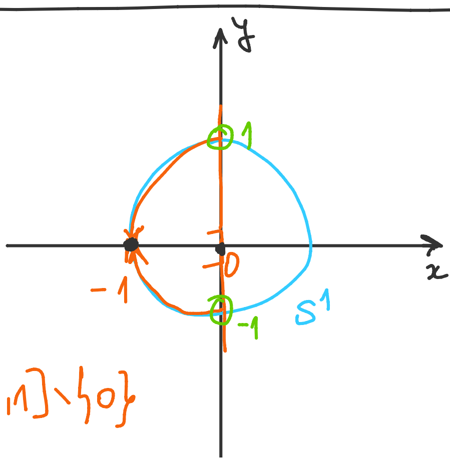


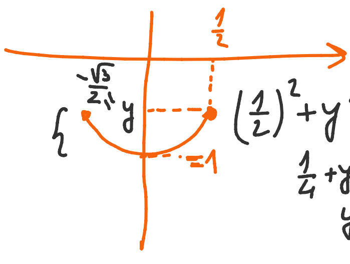

$S^1 \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to$ график релације

$S^2 =$ 

$= \{x^2+y^2+z^2=1\}$

- $S^1([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]) = [-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{2},1]$



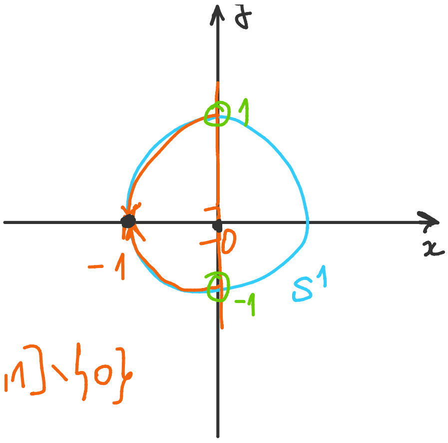



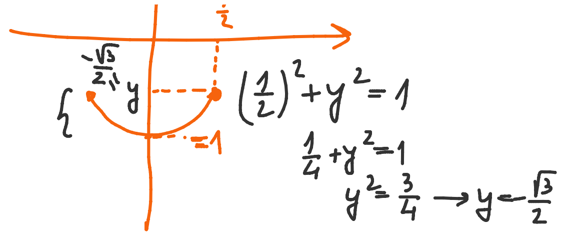

$(\frac{1}{2})^2 + y^2 = 1$

$\frac{1}{4} + y^2 = 1$

$y^2 = \frac{3}{4} \to y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $S^1((-1,0]) = [-1,1]\setminus\{0\}$




- $S^1([-1,0]) = [-1,1] \setminus \{0\}$
- $S^1(0) = S^1(\{0\}) = \{-1,1\}$ ← График није функционалан
- $S^1(50) = S^1(\{50\}) = \emptyset$

12. Нека је дато пресликавање $f = (F, A, B)$ (при чему знамо да је $F$ функционалан график). Показати да је услов $\pi_2 F = B$ еквивалентан услову да је пресликавање $f$ сурјекција. Показати да је услов инјективности пресликавања $f$ еквивалентан томе да је $F^{-1}$ функционалан график (као график бинарне релације).

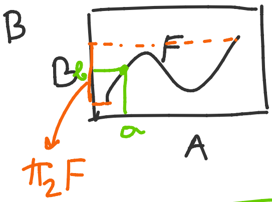
Напомена: Подсетимо се дефиниција из средње школе. Кажемо да је пресликавање $f : A \to B$ сурјекција или "НА" ако важи

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A) f(a) = b.$$

Кажемо да је пресликавање $f : A \to B$ инјекција или "1-1" ако за све елементе $a_1, a_2 \in A$ важи импликација

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

$f : A \to B$




A, B - скупови
F - график
f - релација

$$\boxed{f(a) = b \iff (a,b) \in F}$$

- $\pi_2 F = B \iff f$ на

$\boxed{\Rightarrow}$ $b$ - произвољно из $B$

$$b \in B \underset{\pi_2 F = B}{\Rightarrow} b \in \pi_2 F \iff (\exists a \in A)(a,b) \in F \iff (\exists a \in A)\ f(a) = b$$

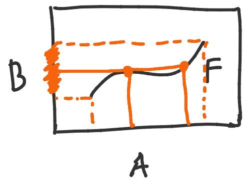
$\boxed{\Leftarrow}$ $\pi_2 F = B$ ?

$\subseteq$ увек

$B \subseteq \pi_2 F$ ?

$$b \in B \text{ произв. } \underset{f \text{ на}}{\Rightarrow} (\exists a \in A)\ f(a) = b \iff (\exists a \in A)(a,b) \in F \iff b \in \pi_2 F$$

- $F^{-1}$ функционалан $\iff f$ 1-1 (доказати)




$\pi_1 F^{-1} = \pi_2 F$ ← за вежбу

$$\iff (\forall b \in \pi_1 F^{-1})(\exists_1 a \in A)(b,a) \in F^{-1}$$

$$\iff (\forall b \in \pi_2 F)(\exists_1 a \in A)(a,b) \in F$$

**Деф:** Производ пресликавања $f=(F,X,Y)$ и $g=(G,A,B)$ је пресликавање

$$f\times g := (F\times G, X\times A, Y\times B)$$

које се дефинише са

$$f\times g : X\times A \longrightarrow Y\times B$$

$$(f\times g)(x,a) = (f(x), g(a))$$

13. Чему је једнак производ пресликавања $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ и пресликавања $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $g(n)=n^2$?

14. Чему је једнак производ пресликавања $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $f_1(x)=(x^5,x+7)$ и $f_2:\mathbb{R}\to\boxed{\mathbb{R}^3}$, $f_2(x)=(x^8,\sqrt[3]{x},|x|)$.

(13) $f\times g = (F\times G, \mathbb{R}\times\mathbb{N}, \mathbb{R}\times\mathbb{N})$

$$f\times g : \mathbb{R}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}\times\mathbb{N}$$

$$(f,g)(x,n) = (f(x), g(n)) = (x^3, n^2)$$

(14) $f_1\times f_2 : \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}_{\mathbb{R}^2} \to \underbrace{\mathbb{R}^2\times\boxed{\mathbb{R}^3}}_{\mathbb{R}^5}$

$$(f_1\times f_2)\underbrace{(x,y)}_{\in\mathbb{R}^2} = (\underbrace{f_1(x)}_{\in\mathbb{R}^2}, \boxed{\underbrace{f_2(y)}_{\in\mathbb{R}^3}}) = ((x^5, x+7), (y^8, \sqrt[3]{y}, |y|))$$

$$= \underbrace{(x^5, x+7, y^8, \sqrt[3]{y}, |y|)}_{\in\mathbb{R}^5}$$