Понедељак 14.12.2020.

Деф: Подниз низа $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($n\mapsto z_n$) је низ $k\mapsto z_{n(k)}$ где је $k\mapsto n(k)$ неко строго растуће пресликавање.

$z_1, \boxed{z_2}, z_3, \cancel{z_4}, \boxed{z_5}, \dots, \boxed{z_{13}}, \dots$

$k=1 \quad n(1)=2$

$k=2 \quad n(2)=5 \qquad 2<5<13<\dots$

$k=3 \quad n(3)=13$

Деф: Тачка $\boxed{\eta\in\mathbb{C}}$ је ТАЧКА НАГОМИЛАВАЊА низа $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ако постоји подниз $(z_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ такав да $z_{n(k)}\to\eta$ када $k\to+\infty$.

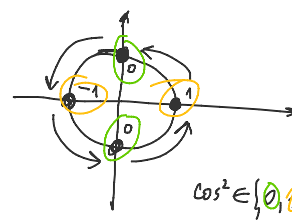
$(-1)^n$, $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$

$-1, -1, -1, \dots \to -1$

$1, 1, 1, \dots \to 1$

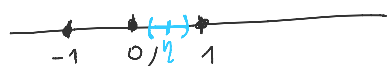
1) Одредити т.н. низа $x_n = \underbrace{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}_{\downarrow\ -1\ \vee\ 1} \cdot \underbrace{\cos^2\frac{n\pi}{2}}_{\downarrow\ 0\ \vee\ 1}$, $n\in\mathbb{N}$

$2\,|\,n(n+1) \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}\in\mathbb{N}$



$\cos^2\in\{0,1\}$

$x_n\in\{0,-1,1\}$ → ниједна тачка из $\mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$ не може да буде т.н.



$(\eta-\varepsilon, \eta+\varepsilon)$ не садржи чланове низа

$\eta\neq 0,-1,1 \Rightarrow \varepsilon=\frac{1}{2}\min\{d(\eta,0), d(\eta,-1), d(\eta,1)\}>0$

$n=4k$: $x_{4k}=(-1)^{\frac{\cancel{4}^{2}k(4k+1)}{\cancel{2}}}\cdot\cos^2\left(\frac{\cancel{4}^{2}k\pi}{\cancel{2}}\right) = 1\cdot 1 = 1$

$x_4, x_8, x_{12}, \dots$

$1, 1, 1, 1, \dots \to 1$ ✓

$n=4k+1$: $x_{4k+1}=(-1)^{\frac{(4k+1)\cancel{(4k+2)}^{2k+1}}{\cancel{2}}}\cdot\cos^2\left(\underbrace{\frac{(4k+1)\pi}{2}}_{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right) = (-1)\cdot 0 = 0$

$x_1, x_5, x_9, x_{13}, \dots$

$0, 0, 0, \dots \to 0$ ✓

$n=4k+2$: (домаћи)

$x_{4k+2}\to -1$ ✓

② Доказати да је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ непрекидна у свакој тачки.

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

непр. у x_0

Нека је $x_0\in\mathbb{R}$ произвољно.

$$|f(x)-f(x_0)| = |\sin x-\sin x_0| = \left|2\cdot\underbrace{\cos\frac{x+x_0}{2}}\cdot\sin\frac{x-x_0}{2}\right| = 2\cdot\underbrace{\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|}\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$\cos\in[-1,1]$

$|\cos|\leq 1$

$\Downarrow$

$$|f(x)-f(x_0)|\leq 2\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

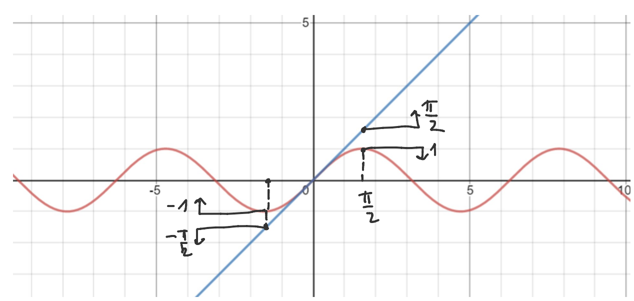
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cdot\cos\alpha\sin\beta$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{array}\right\}\quad \alpha=\frac{x+y}{2},\quad \beta=\frac{x-y}{2}$$

$$\boxed{\sin x-\sin y = 2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}}$$

(скрипта 84. стр. лема 18) $0\leq\theta<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta\leq\theta\leq\operatorname{tg}\theta$.



Следи да важи: $\sin\theta\leq\theta$, $\theta\geq 0$

$\sin\theta\geq\theta$, $\theta<0$

$(\sin(-\theta)=-\sin\theta)$

$$|\theta|\geq|\sin\theta|,\ \theta\in\mathbb{R}$$

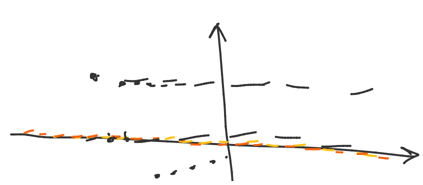
$$|f(x)-f(x_0)| \leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq \cancel{2}\cdot\left|\frac{x-x_0}{\cancel{2}}\right| = |x-x_0|<\delta$$

$\varepsilon>0$ произвољно. Узмемо $\delta=\varepsilon$.

$$|x-x_0|<\delta=\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\leq \ldots \leq |x-x_0|<\delta=\varepsilon.$$

домаћи: исто за $\cos x$.

③ Нека је $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.



③ Нека је $f(x) = \begin{cases} \ldots \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Наћи $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Хајне: $\exists \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \alpha \Rightarrow (\forall x_n \to 0 \Rightarrow \underline{f(x_n) \to \alpha})$

<u>ПП</u> $\exists \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \alpha$.

[$\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ су свуда густи у $\mathbb{R}$!]

$(\exists r_n \in \mathbb{Q})\ r_n \to 0$ (нпр. $r_n = \frac{1}{n}$)

$(\exists g_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ g_n \to 0$ (нпр. $g_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$)

$\Downarrow$ Хајне

$f(r_n) \to \alpha$

$f(g_n) \to \alpha$

$\lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{f(r_n)}_{r_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow 0} = \lim\limits_{n \to \infty} 0 = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{f(g_n)}_{g_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow 1} = \lim\limits_{n \to \infty} 1 = 1$

$\left.\begin{array}{l} f(r_n) \to \alpha \\ f(r_n) \to 0 \end{array}\right\} \alpha = 0$

лимес је јединствен!

$\lightning$

$\left.\begin{array}{l} f(g_n) \to \alpha \\ f(g_n) \to 1 \end{array}\right\} \alpha = 1$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

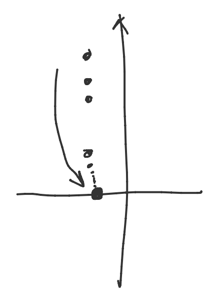
Следило би и да f није непр. у 0

јер иначе $\exists \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

⊛ Низ x_n опадајући $(\in \mathbb{R})$ и ограничен одоздо, онда $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

$\Downarrow$

$\exists \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = L$.



Хоћемо: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = L$, $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$

<u>ПС</u> $(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \wedge \boxed{|x_n - L| \geq \varepsilon.}$

узмемо га!

$L + \varepsilon$ није доње ограничење за $x_n \Rightarrow (\exists N \in \mathbb{N})\ L \leq x_N < L + \varepsilon$

Пошто x_n опада $\Rightarrow (\forall n \geq N)\quad x_n \leq x_N$

$\Downarrow$

Пошто x_n опада $\Rightarrow (\forall n \geq N)$ $x_n \leq x_N$

$$\Downarrow$$

$$L \leq x_n \leq x_N < L+\varepsilon$$

L је инф.

$$\Rightarrow (\forall n \geq N) \ \boxed{|x_n - L| < \varepsilon} \quad \lightning$$

$(n_0 = N)$

Т о монотоном и ограниченом низу: Сваки опадајући (растући) низ (из $\mathbb{R}$) ограничен одоздо (одозго) има лим.

Примери:

4) $x_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$, $x_n \nearrow$, знамо $e := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = e$

Посматрамо $y_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{n!}$. Важи $y_n \downarrow$. Доказати!

Показати: $e = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$. Доказати!

$\boxed{y_n \downarrow ?}$

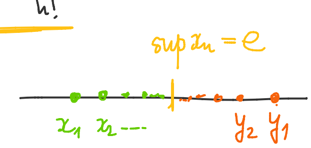
$$y_{n+1} - y_n = \left(\sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{n!}\right) = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{n+1} - 1\right) = \frac{1}{(n+1)!}\left(2-(n+1)\right) = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} \leq y_n \Rightarrow y_n \downarrow$$

$\boxed{y_n \geq 0}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$

$$y_n = \boxed{\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}} + \frac{1}{n!} = x_n + \frac{1}{n!}, \qquad \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = x_n$$



$\exists \lim x_n$ и $\exists \lim \frac{1}{n!}$ и $\exists \lim y_n$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n}_{e} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}}_{0} = e + 0 = e.$$

$$\underbrace{\quad}_{e} \to 0$$

$$0 \le \frac{1}{n!} \le \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

$(n! \geq n)$

Лема о три низа

Нека су $f, g, h \in \mathbb{R}^S$ тд. $f \le_{\mathcal{F}} g \le_{\mathcal{F}} h$ и $\alpha = \lim_{\mathcal{F}} f = \lim_{\mathcal{F}} h$. Тада $\exists \lim_{\mathcal{F}} g$ и једнак је α.

(о сендвичу, о 2 полицајца)

⑤ Низ x_n је задат рекурентно $x_1 = \sqrt{2}$, $\underbrace{x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}}_{\text{следећи члан преко претходног}}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказати да $\exists \lim_{n\to\infty} x_n$ и наћи га.

$$x_4 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots ?$$

$(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \geq 0$

$\sqrt{\cdot}$ растућа

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \geq \sqrt{2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (x_1 \checkmark)$$

Ограничено одозго? Индукцијом: $x_n < 2$

Б: $n = 1$ $\quad x_1 = \sqrt{2} < 2$

Х: $x_n < 2$

К: $x_{n+1} < 2$?

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2$$

ограничен низ:

$$\boxed{\sqrt{2} \leq x_n < 2}$$

монотоност? $\quad x_{n+1} \geq x_n$?

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+x_n} \geq x_n \ /^2$$

$$\Leftrightarrow 2 + x_n \geq x_n^2$$

$$\Leftrightarrow x_n^2 - x_n - 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_n \uparrow}$$

$\Leftrightarrow$ [illegible]

$\Leftrightarrow \quad x_n^2 - x_n - 2 \leq 0$

$\Rightarrow \boxed{x_n \uparrow}$

$\Leftrightarrow \quad (x_n - 2)(x_n + 1) \leq 0$ ✓

$x_n < 2 \Rightarrow x_n - 2 < 0$ $\quad$ $x_n + 1 \geq \sqrt{2} + 1 > 0$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \alpha. \qquad (\alpha = ?)$

домаћи: непрекидна по деф.

непр. ф-ја: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Хајне, $t_n \to x_0 \Rightarrow f(t_n) \to f(x_0)$

лимес „пролази" кроз непрекидне ф-је!

$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sqrt{2+x} \\ \exists \lim x_n = \alpha \end{array}\right\} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2+x_n} = \sqrt{2+\alpha}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$

$\lim \, \Big/ \quad x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+x_n} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} x_n}$$

$$\alpha = \sqrt{2+\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = 2 + \alpha$$

$$(\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2} \vee \alpha = -1$$

не може да буде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ јер $x_n \geq \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 2}$$