Петак 13.11.2020.

53. Ако је $(a_k)_{0\le k\le n}$ низ елемената Абелове групе $(A,+,0)$ и $\underbrace{\varphi:\{0,1,\dots,n\}\to\{0,1,\dots,n\}}$ произвољна пермутација показати (индукцијом по $n\in\mathbb{N}_0$) да важи

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_{\varphi(j)}.$$

произвољни редослед елемената

пр. $n=4$

$\varphi:\{0,1,2,3,4\}\to\{0,1,2,3,4\}$ бијекција

$$\varphi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{4} a_k = ((((a_0)+a_1)+a_2)+a_3)+a_4$$

$$\sum_{j=0}^{4} a_{\varphi(j)} = ((((a_2)+a_3)+a_0)+a_4)+a_1$$

$\sum$ се дефинише индуктивно:

$a\in A^0=\emptyset \Rightarrow \underbrace{\sum a_i=0}$ Збир празног скупа је 0

$a\in A^1=A \Rightarrow \sum a=a$

Индуктивно (знамо да сум. ел. из A^n објашњавамо како се сум. ел. из A^{n+1})

$a\in A^{n+1}$

$a=(\underbrace{a_1,a_2,\dots,a_n}_{\bar a},a_{n+1})$ уређена $(n+1)$-торка

$\bar a\in A^n$ Сумирамо неки ел. из A^n

$$\sum a = \underbrace{\sum \bar a}_{\in A} + a_{n+1}$$

бинарна оп. од које смо кренули (два елемента)

Ознака: $\sum a \equiv \sum_{i=1}^{n+1} a_i$

Индукцијом по $n\in\mathbb{N}_0$:

1) $n=0$: $\varphi:\{0\}\to\{0\}$, $\varphi(0)=0$

БАЗА

$$\sum_{k=0}^{0} a_0 = a_0 = \sum_{j=0}^{0} a_{\varphi(0)}$$

2) ХИПОТЕЗА $\forall (n+1)$ елемената и $\forall\varphi$ пермутацију $\varphi:\{0,\dots,n-1,n\}\to\{0,\dots,n-1,n\}$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_{\varphi(j)}$$

3) КОРАК Нека имамо произвољних $(n+2)$ елемената $b_0,b_1,b_2,\dots,b_n,b_{n+1}$ и ψ пермутација

Треба доказати $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} b_k = \sum_{j=0}^{n+1} b_{\psi(j)}$.

(1) $\psi(n+1)=n+1$

$$\psi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n & n+1 \\ & & & & n+1 \end{pmatrix}$$

Индуктивна хипотеза на $b_0,\dots,b_n$ и $\psi\big|_{\{0,\dots,n\}}$

ово је пермутација

Индуктивна хипотеза на $b_0, \dots, b_n$ и $\boxed{\psi|_{\boxed{\{0,\dots,n\}}}}$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{j=0}^{n} b_{\psi|_{\{0,\dots,n\}}(j)} \qquad /+b_{n+1}$$

$= \psi(j)$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) + b_{n+1} = \left(\sum_{j=0}^{n} b_{\psi(j)}\right) + \boxed{b_{n+1}}$$

$= b_{\psi(n+1)}$

по (*) дефиницији $\longrightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n+1} b_k = \sum_{j=0}^{n+1} b_{\psi(j)} \qquad \checkmark$$

(2) $\psi(n+1) \neq n+1$

$(\exists j_0)\ \psi(j_0) = n+1$

θ – нова пермутација

$$\theta(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \neq j_0, n+1 \\ \psi(j_0), & x = n+1 \\ \psi(n+1), & x = j_0 \end{cases}$$

$j_0 = 3$

$$\psi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Применимо (1) на θ:

$$\sum_{k=0}^{n+1} b_k = \sum_{j=0}^{n+1} b_{\theta(j)}$$

$$= \left(\left(\sum_{j=0}^{j_0-1} b_{\underbrace{\theta(j)}_{\psi(j)}}\right) + b_{\underbrace{\theta(j_0)}_{\psi(n+1)}}\right) + \dots\Bigg) + b_{\underbrace{\theta(n+1)}_{\psi(j_0)}}$$

Радимо у Абеловој групи!

$b_{\theta(j_0)} \leftrightarrow b_{\theta(j_0+1)}$

$b_{\theta(j_0)} \leftrightarrow b_{\theta(j_0+2)}$

$\vdots$

$b_{\theta(j_0)} \leftrightarrow b_{\theta(n+1)}$

$b_{\theta(j_0+1)} \quad b_{\theta(j_0+2)} \quad \dots \quad b_{\theta(n+1)} \quad b_{\theta(j_0)}$

$b_{\theta(n+1)} \leftrightarrow b_{\theta(n)}$

$b_{\theta(n+1)} \leftrightarrow b_{\theta(n-1)}$

$\vdots$

$b_{\theta(n+1)} \leftrightarrow b_{\theta(j_0+1)}$

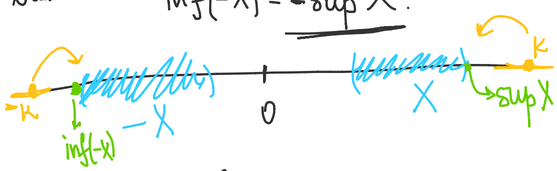
$$= \Bigg(\bigg(\Big(\sum_{j=0}^{j_0-1} b_{\theta(j)}\Big) + b_{\theta(n+1)}\bigg) + b_{\theta(j_0+1)}\Bigg) + \dots \Bigg) + b_{\theta(j_0)}$$

$\theta \rightsquigarrow \psi$

$$= \Bigg(\bigg(\Big(\sum_{j=0}^{j_0-1} b_{\psi(j)}\Big) + b_{\psi(j_0)}\bigg) + b_{\psi(j_0+1)}\Bigg) + \dots \Bigg) + b_{\psi(n+1)}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} b_{\psi(j)} \quad ✓$$

(*) $(A,+,\leq,0)$ – уређена Абелова група и $X \subseteq A$ т.д. $\exists \sup X$. Тада $\exists \inf(-X)$ и важи $\inf(-X) = -\sup X$.



$-X = \{-x \mid x \in X\}$

Означимо $\sup X = M$. Знамо:

1) $M \in X^{\leq}$ $\quad (\forall x \in X)\, M \geq x$.

2) $M \in (X^{\leq})^{\geq}$

Треба:

1) $-M \in (-X)^{\geq}$

2) $-M \in ((-X)^{\geq})^{\leq}$

1) $(\forall t \in -X)\ t \geq -M \iff (\forall x \in X)\ -x \geq -M \quad (+x+M)$

$t = -x$, $x \in X$

$\iff (\forall x \in X)\ -x+(x+M) \geq -M+(x+M)$

$0+M \geq 0+x$

$\iff (\forall x \in X)\ M \geq x$ 1 ✓

2) Нека је $t \in (-X)^{\geq}$, произвољан.

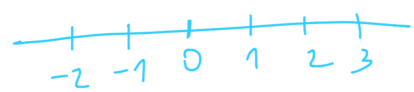
Деф: УРЕЂЕНА АБЕЛОВА ГРУПА $(A,+,\leq,0)$ је структура за коју важи:

(1) $(A,+,0)$ је Абелова група

(2) $(A,\leq)$ је уређен скуп ($\leq$ је релација поретка на A)

(3) Релација $\leq$ је сагласна са оп. $+$

$x \leq y \Rightarrow \tau_a x \leq \tau_a y \to x+a \leq y+a$, за све $x,y,a \in A$



$(\mathbb{Z},+,0) \to$ један пример УАГ

$0 \in \mathbb{Z}$, $\{0\}^{\geq}$, $\{0\}^{\leq}$

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_- = -\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}^*_+ = \mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}^*_- = -\mathbb{N}_0$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

(2) Нека је $t \in (-X)^{\geq}$, произвољан.

Треба $-M \geq t$?

$(\forall u \in -X)\ t \leq u$

$u = -x$

$x \in X$

$(\forall x \in X)\ t \leq -x \iff \underbrace{(\forall x \in X)\ x \leq -t}_{(-t \text{ је ГО скупа } X)}$ $/(+x+(-t))$

$-t \in X^{\leq}$

(2) $\Rightarrow$ ако имамо $w \in X^{\leq}$, онда $M \leq w$

$w = -t$: $M \leq -t \quad / -M+t$

$t \leq -M$ ✓

Домаћи: $\sup(-X) = -\inf X$. (преметни овај задатак!) $\quad -(-X) = X$

$\inf(-X) = -\sup X \quad (X \mapsto -X) \Rightarrow \inf(X) = -\sup(-X) \Rightarrow \sup(-X) = -\inf(X)$

55. Нека је $(A, +, \leq, 0)$ уређена Абелова група и $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ скупови такви да постоје $\sup X$ и $\sup Y$. Показати да тада постоји $\sup(X + Y)$ и да важи

$$\sup(X+Y) = \underbrace{\sup X + \sup Y}_{A+B}.$$

$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$

$A = \sup X \qquad B = \sup Y$

(1) $A \in X^{\leq}$ $\qquad$ (1) $B \in Y^{\leq}$

(2) $A \in (X^{\leq})^{\geq}$ $\qquad$ (2) $B \in (Y^{\leq})^{\geq}$

Треба:

(1) $A + B \in (X+Y)^{\leq}$

(2) $A + B \in ((X+Y)^{\leq})^{\geq}$

(1) $t \in X+Y$ произвољан. Треба: $t \leq A+B$?

$t = x_0 + y_0$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$

(1) $\Rightarrow x_0 \leq A$

(1) $\Rightarrow y_0 \leq B$

$\overset{(\#)}{\Rightarrow} x_0 + y_0 \leq A + B$

$t \leq A + B$ ✓

доказујемо (#) $\quad \left.\begin{matrix} a \leq c \\ b \leq d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + b \leq c + d$

$a \leq c \ /+b \qquad b \leq d \ /+c$

$a + b \leq c + b \qquad b + c \leq d + c$

$b+c=c+b$

$a + b \leq b + c \leq d + c$

$\overset{T}{\Rightarrow} a + b \leq c + d$

2 Нека је $t \in (X+Y)^{\leq}$ произвољан. Треба: $A+B \leq t$?

$(\forall x \in X)(\forall y \in Y) \quad x+y \leq t$

фиксирамо $x \in X$: $\quad (\forall y \in Y) \quad x+y \leq t \ /(-x)$

$y \leq t-x \quad \Rightarrow t-x$ је го за Y

$t-x \in Y^{\leq}$

$\boxed{2 \Rightarrow (\forall u \in Y^{\leq}) \ B \leq u \quad B \in (Y^{\leq})^{\geq}}$

$\xrightarrow{u = t-x} B \leq t-x$

$\Downarrow$

$x \leq t-B$ (важи за свако x, одфиксирамо га)

$(\forall x \in X) \quad x \leq t-B$

$t-B \in X^{\leq}$

$\boxed{2 \Rightarrow (\forall w \in X^{\leq}) \ A \leq w \quad A \in (X^{\leq})^{\geq}}$

$\xrightarrow{w = t-B} A \leq t-B$

$\Downarrow$

$A+B \leq t$ ✓