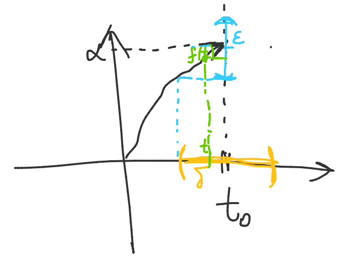
Петак 11.12.2020.

86. Нека је дата функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ и $t_0\in\mathbb{R}$. Показати да је $\alpha = \lim\limits_{\mathcal{F}^o_{t_0}} f$ ако и само ако важи

↳ фиксна

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall t\in\mathbb{R})0<|t-t_0|<\delta \Rightarrow |f(t)-\alpha|<\varepsilon.$$

→ $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=\alpha$



$$\mathcal{F}^o_{t_0} = \{A\setminus\{t_0\} \mid A\in\mathcal{F}_{t_0}\}$$

↳ околина, $(\exists\delta>0)\ (t_0-\delta,t_0+\delta)\subseteq A$

$$\lim_{\mathcal{F}^o_{t_0}} f=\alpha \iff (\forall\varepsilon>0)\ \{x\in\mathbb{R}\setminus\{t_0\} \mid |f(x)-\alpha|<\varepsilon\}\in\mathcal{F}^o_{t_0}$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$\varepsilon>0$ произв. $\longrightarrow \underbrace{(\exists\delta>0)}_{\text{имамо}}(\forall t\in\mathbb{R})\ 0<|t-t_0|<\delta \Rightarrow |f(t)-\alpha|<\varepsilon$

$$\{x\in\mathbb{R}\setminus\{t_0\} \mid 0<|x-t_0|<\delta\} \subseteq \{x\in\mathbb{R}\setminus\{t_0\} \mid |f(x)-\alpha|<\varepsilon\}$$

$$\|$$

$\{x\in\mathbb{R} \mid x\in \boxed{(t_0-\delta,t_0+\delta)}\setminus\{t_0\}\}$

↳ околина од t_0

$\Uparrow$

$\mathcal{F}^o_{t_0}$

$\Longrightarrow \{x\in\mathbb{R}\setminus\{t_0\} \mid |f(x)-\alpha|<\varepsilon\}\in\mathcal{F}^o_{t_0}$

$\boxed{\Rightarrow}$

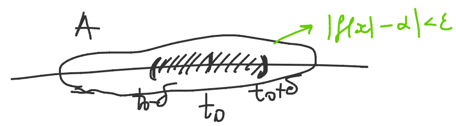
$\varepsilon>0$ произв.

$$\alpha=\lim_{\mathcal{F}^o_{t_0}} f \Rightarrow \{x\in\mathbb{R}\setminus\{t_0\} \mid \boxed{|f(x)-\alpha|<\varepsilon}\}\in\mathcal{F}^o_{t_0}$$

$\|$

$A\setminus\{t_0\}$, A-околина $t_0 \Rightarrow (\exists\delta>0)\ (t_0-\delta,t_0+\delta)\subseteq A$

$\Downarrow$



$$\rightarrow \left[(\forall x\in\mathbb{R})\ \underbrace{x\in(t_0-\delta,t_0+\delta)\setminus\{t_0\}}_{0<|x-t_0|<\delta} \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon\right]$$

87. Нека је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ непрекидна у тачки $a\in\mathbb{R}$. Показати да тада важи

$$f(a)=\lim_{t\to a} f(t).$$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

$\left[\exists \lim\limits_{\mathcal{F}_a} f\right]$

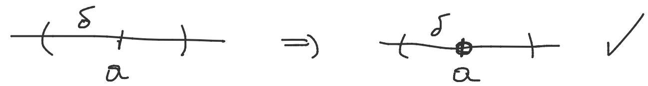
$\Downarrow$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall t\in\mathbb{R})\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

$\left[f(a)=\lim\limits_{\mathcal{F}^o} f\right]$

$$\Downarrow$$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall t\in\mathbb{R})\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$? $\left[f(a)=\lim_{\mathcal{F}_a^\circ} f\right]$



исто је лако и гледати са филтерима, јер је једно надскуп другог ← схватити за домаћи

88. Нека је дата функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ и нека је $t_0\in\mathbb{R}$. Показати да је $\alpha=\lim\limits_{t\to t_0} f(t)$ ако и само ако за сваки низ t_n такав да $t_n\to t_0$ када $n\to+\infty$ важи $f(t_n)\to\alpha$ када $n\to+\infty$. (Хајнеова теорема)

$\alpha=\lim_{\mathcal{F}_{t_0}^\circ} f \iff (\forall t_n)\ t_0=\lim_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} t \Rightarrow \alpha=\lim_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} f\circ t$ $t:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $f\circ t:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\alpha=\lim\limits_{t\to t_0} f(t) \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\ 0<|x-t_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-\alpha|<\varepsilon$ $(*)$

← убацити t_n уместо x

t_n – произвољан тд. $t_n \xrightarrow{n\to\infty} t_0 \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq n_0\Rightarrow|t_n-t_0|<\varepsilon$ $(\#)$

- $\varepsilon>0$ – произвољно
- у $(*)$ узмемо δ из деф.
- у $(\#)$ узмемо δ уместо ε $\left[(\forall\delta>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq n_0\Rightarrow|t_n-t_0|<\delta\right]$
- у $(\#)$ узмемо n_0

$(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq n_0\Rightarrow|t_n-t_0|<\delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} |f(t_n)-\alpha|<\varepsilon$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq n_0\Rightarrow|f(t_n)-\alpha|<\varepsilon$

додамо: $0<|t_n-t_0|<\delta$ (шири скуп $\Rightarrow$ ужи скуп)

по деф.

$\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)=\alpha$. (лимес низа)

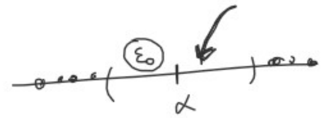
$\boxed{\Leftarrow}$ ППС $\alpha\neq\lim\limits_{t\to t_0} f(t)$

$$(\exists\varepsilon_0>0)(\forall\delta>0)\neg\underbrace{(0<|x-t_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-\alpha|<\varepsilon_0)}$$

$$0<|x-t_0|<\delta \ \wedge\ |f(x)-\alpha|\geq\varepsilon_0$$

$$0<|x-t_0|<\delta \ \wedge\ |f(x)-\alpha|\geq \varepsilon_0$$

идеја: узимамо низ t_n т.д. $t_n \to t_0$ за $\delta=\frac{1}{n}$



$\delta=1:$	$0<\|t_1-t_0\|<1$	$\|f(t_1)-\alpha\|\geq\varepsilon_0$
$\delta=\frac{1}{2}:$	$0<\|t_2-t_0\|<\frac{1}{2}$	$\|f(t_2)-\alpha\|\geq\varepsilon_0$
$\delta=\frac{1}{3}:$	$0<\|t_3-t_0\|<\frac{1}{3}$	$\|f(t_3)-\alpha\|\geq\varepsilon_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\delta=\frac{1}{n}:$	$0<\|t_n-t_0\|<\frac{1}{n}$	$\|f(t_n)-\alpha\|\geq\varepsilon_0$

$\Longrightarrow f(t_n)\not\to\alpha$

$\neg\left(\lim_{n\to\infty} f(t_n)=\alpha\right)$

$\Downarrow$

$t_n \longrightarrow t_0$

доказујемо по деф.

$a=\varepsilon$
$b=1$

$\varepsilon>0$ произв. Архимедова аксиома: $(\exists n_0\in\mathbb{N})\ \frac{1}{n_0}<\varepsilon \quad (\Leftrightarrow \varepsilon\cdot n_0>1)$

$(\forall n\geq n_0) \quad 0<|t_n-t_0|<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\varepsilon$

$\Downarrow$

$\frac{1}{n_0}\geq\frac{1}{n}$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)\ |t_n-t_0|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} t_n=t_0$

$\Downarrow$

$f(t_n)\to\alpha$ ↯

89. Нека је $\mathcal{F}$ филтер на непразном скупу S и нека је $\boxed{A\subseteq S}$ непразан скуп. Дефинишемо фамилију подскупова
$$\mathcal{F}_A=\{A\cap X\ :\ X\in\mathcal{F}\}.$$
Показати да је $\mathcal{F}_A$ филтер на A ако и само ако $\emptyset\notin\mathcal{F}_A$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathcal{F}_A$ филтер $\xRightarrow{F2}$ $\emptyset\notin\mathcal{F}_A$

$\boxed{\Leftarrow}$ F1: $A\in\mathcal{F}_A$?

$$S\in\mathcal{F}\Rightarrow \underbrace{A\cap S}_{=A}\in\mathcal{F}_A$$

F2: $\emptyset\notin\mathcal{F}_A$ ✓

$F2: \ \emptyset \notin \mathcal{F}_A$ ✓

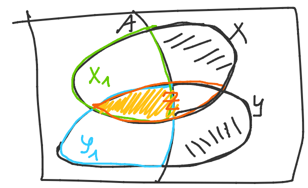
$F3: \ X_1, Y_1 \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow X_1 \cap Y_1 \in \mathcal{F}_A$

$\boxed{\Rightarrow}$ $X_1, Y_1 \in \mathcal{F}_A$

$$\left.\begin{array}{ll} X_1 = A\cap X, & X\in\mathcal{F} \\ Y_1 = A\cap Y, & Y\in\mathcal{F}\end{array}\right\} X\cap Y\in\mathcal{F}$$

$$X_1\cap Y_1 = (A\cap X)\cap(A\cap Y) = A\cap(X\cap Y)\in\mathcal{F}_A$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $X_1\cap Y_1\in\mathcal{F}_A$



S

$$X_1\cap Y_1 = A\cap Z, \quad Z\in\mathcal{F}$$

$$\tilde{X} = Z\cup X_1$$

$$\tilde{Y} = Z\cup Y_1$$

уверити се!

$$\tilde{X}\cap\tilde{Y} = \boxed{(Z\cup X_1)\cap(Z\cup Y_1) = Z}\in\mathcal{F} \Rightarrow \tilde{X},\tilde{Y}\in\mathcal{F}$$

$$\Rightarrow \tilde{X}\cap A\in\mathcal{F}_A$$
$$\tilde{Y}\cap A\in\mathcal{F}_A$$

$$\tilde{X}\cap A = (Z\cup X_1)\cap A = (Z\cap A)\cup(X_1\cap A) = (X_1\cap Y_1)\cup X_1 = X_1$$

$$\tilde{Y}\cap A = \ldots = Y_1$$

$$\Rightarrow X_1, Y_1\in\mathcal{F}_A$$

Допуна: $a\in\bar{A} \Leftrightarrow (\mathcal{F}_a)_A$ филтер на A

$\bar{A} = A\cup A'$

применимо конструкцију из претходног задатка на филтер околина $\mathcal{F}_a$

$$(\mathcal{F}_a)_A = \{A\cap\mathcal{U} \mid \mathcal{U}\text{-околина од } a\}$$

89. зад: $(\mathcal{F}_a)_A$ филтер на $A \Leftrightarrow \boxed{\emptyset\notin(\mathcal{F}_a)_A \overset{?}{\Leftrightarrow} a\in\bar{A}}$

$a\in\bar{A} \Leftrightarrow a\in A \vee a\in A'$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\emptyset\notin(\mathcal{F}_a)_A$

$A\cap\mathcal{U}\neq\emptyset, \ \forall\mathcal{U}$-околина од a

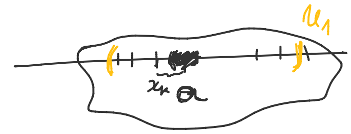
<u>ппс</u> $\neg(a\in A \vee a\in A')$

$\underbrace{a\notin A} \wedge \underbrace{a\notin A'}$

$\hookrightarrow$ постоји околина од a која садржи коначно много тачака из A

$\to$ БУО $(a-\delta_1, a+\delta_1)$ [ако цело U_1 има коначно $\Rightarrow$ и овај интервал има коначно]

нпр. $x_1, x_2, \dots, x_n$



$$\boxed{\delta = \frac{1}{2} \min_{1\le k\le n} |x_k - a|}$$

зашто $\delta > 0$? због овога! $(a \neq x_k \ (\forall k))$

узмемо $U = (a-\delta, a+\delta)$, $U \cap A = \emptyset$ ↯

(јер смо узели δ довољно мало)

$\boxed{\Leftarrow}$ $\emptyset \notin (\mathcal{F}_a)_A \Leftrightarrow (\forall U)_{\text{окол.}} \ A\cap U \neq \emptyset$

$a\in \bar{A} \Rightarrow a\in A \vee a\in A'$, U – околина од a

1° <u>$a\in A$</u>

$\left.a\in U\right\} \ a\in A\cap U \Rightarrow A\cap U\neq\emptyset$

2° <u>$a\in A'$</u>

$\xrightarrow[U \text{ околина}]{}$ унутар U се налази ∞ много тачака из A $\Rightarrow A\cap U \neq \emptyset$

(чак је ∞)