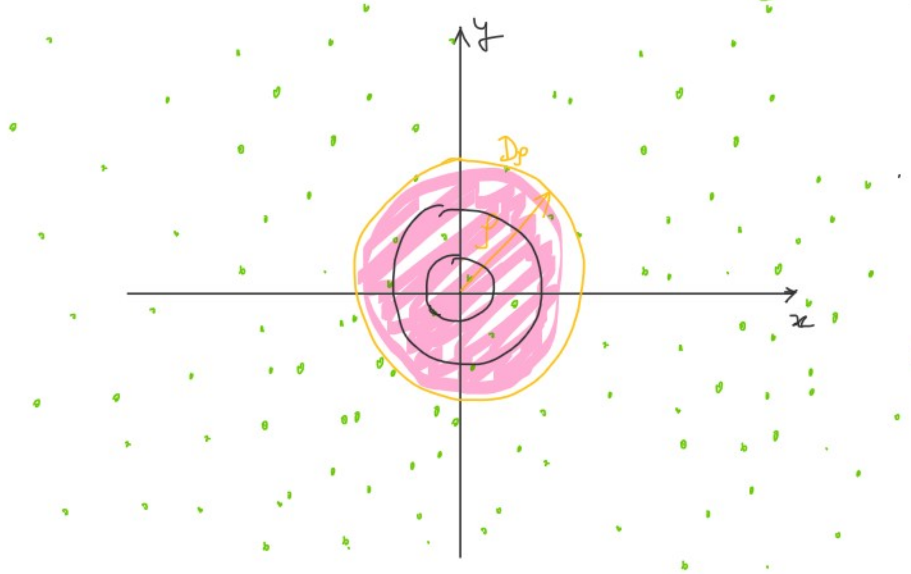
Понедељак 09.11.2020.

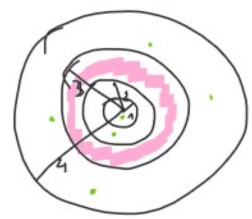
(1) Нека је E непребројив скуп тачака у равни. Доказати да $\exists$ диск $D_\rho = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le \rho^2\}$ који садржи непребројиво много тачака.

E $\quad Card(\underbrace{D_\rho \cap E}_{E_\rho}) > \aleph_0$



Идеја: повећавати $\rho \nearrow$ тд. D_ρ ухвати све више тачака из E.

Посматрајмо дискове $\{D_1, D_2, D_3, D_4, \dots\}$ $\quad D_{\underbrace{n}_{\rho}},\ n\in\mathbb{N}$



$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \mathbb{R}^2 \quad / \cap E$$

$$D_n \cap E = E_n$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$$

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$$

Ако неки E_k није коначан $\Rightarrow$ $E_{k+1}, E_{k+2}, \dots$ нису коначни

ППС Сви скупови E_n су највише пребројиви.

1) Сви су коначни: $\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}_{E}$ је највише пребројива $\rightarrow$ пребројива унија највише пребројивих скупова је највише пребројив скуп

2) ако је неки пребројив $\Rightarrow$ $E_{k+1}, E_{k+2}, \dots$ пребројиви

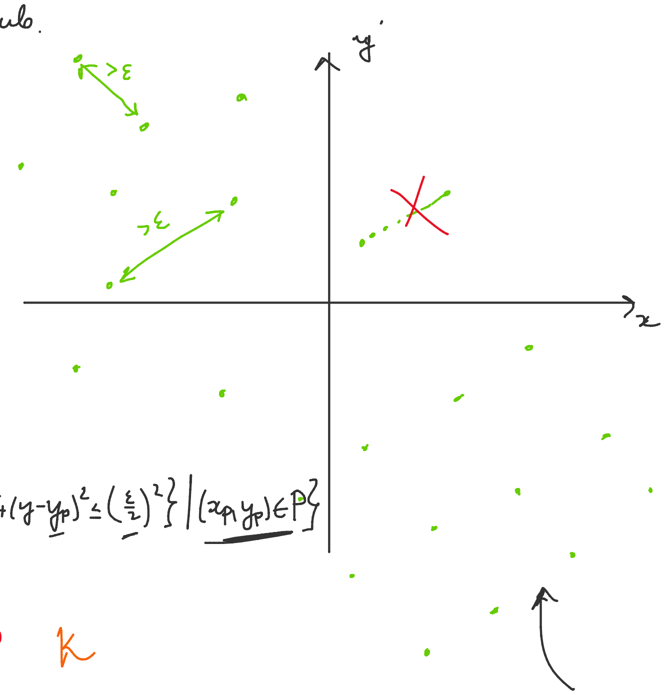
2) ако је $\underbrace{\text{неки}}_{E_k,\ \text{где је } k \text{ неки такво}}$ пребројив $\Rightarrow E_{k+1}, E_{k+2}, \ldots$ пребројиви

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{n\geq k} E_n\right) = \aleph_0$$

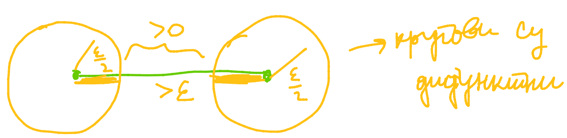
$$\Rightarrow \mathrm{Card}\Big(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}_{E}\Big) = \underline{\aleph_0}$$

↯ (јер је $\mathrm{Card}(E) > \aleph_0$) $\Rightarrow$ постоји $p(\in\mathbb{N})$ $\mathrm{Card}\, E_n \doteq c$.

(2) Нека је P скуп тачака у равни са својством да је растојање између сваке две његове тачке веће од ε ($\varepsilon>0$). Доказати да је P највише пребројив.



идеја - описати око сваке тачке круг пп. $\frac{\varepsilon}{2}$.

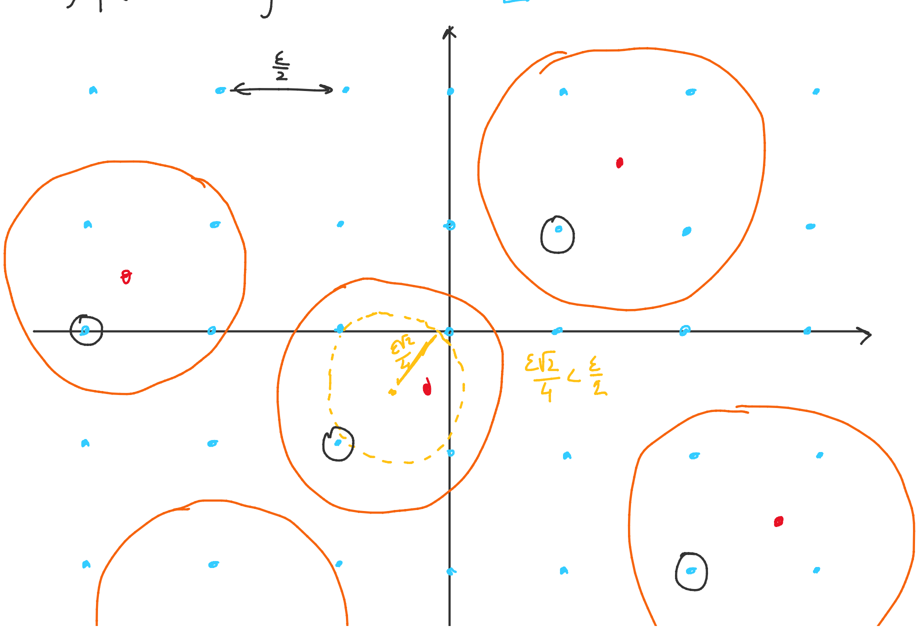


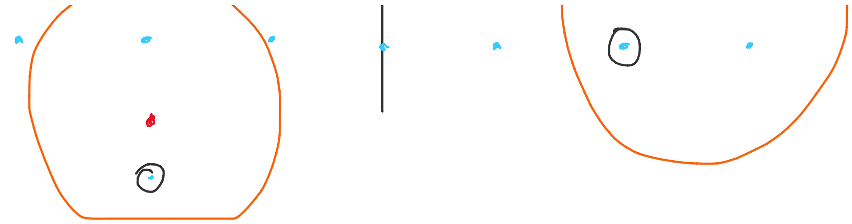
K — скуп свих таквих кругова

$$K = \left\{ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_p)^2+(y-y_p)^2 \leq \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2\} \;\middle|\; (x_p,y_p)\in P \right\}$$

$$\underline{L} = \left\{ \left(k_1\cdot\tfrac{\varepsilon}{2}, k_2\cdot\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \;\middle|\; (k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2 \right\}$$

L P K





⊛ $\varphi: \mathbb{Z}^2 \to L$ (Ч)

$\varphi(k_1,k_2) = \left(k_1\cdot\frac{\varepsilon}{2}, k_2\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right)$ φ-бијекција $\Rightarrow \mathrm{Card}(L) = \mathrm{Card}(\mathbb{Z}^2) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$

$\left[\mathrm{Card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}) \Rightarrow \mathrm{Card}(\mathbb{Z}^2) = \aleph_0\right]$

⊛ $\mathrm{Card}\, P \overset{\psi}{=} \mathrm{Card}\, K$ (#)

ψ-бијекција $\psi(p) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_p)^2+(y-y_p)^2 \le \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\}$, $p=(x_p,y_p)$

⊛ Сваки круг из K садржи бар једну тачку из L (и садржи их коначно много)

$\theta: K \to L$

Сваком кругу из K додељује неку тачку из L која се налази у том кругу

θ је инјективно! (јер су кругови дисјунктни!)

$\mathrm{Card}(K) \overset{(\heartsuit)}{\le} \mathrm{Card}(L)$

⊛ $\underline{\mathrm{Card}(P)} \overset{(\#)}{=} \mathrm{Card}(K) \overset{(\heartsuit)}{\le} \mathrm{Card}(L) \overset{(Ч)}{=} \mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \underline{\aleph_0}$

$\mathrm{Card}(P) \le \aleph_0 \Rightarrow P$ је највише пребројив

③ Доказати да скуп свих фја $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ има бројност већу од $c = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

идеја: X-скуп $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(X)) > \mathrm{Card}(X)$

тврђење са предавања

• коначни $2^n > n$

• пребројиви $c > \aleph_0$

• непр. $\underline{\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > c}$

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ – подскупови од $\mathbb{R}$

$$A \subseteq \mathbb{R} \overset{?}{\longleftrightarrow} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$A \subseteq \mathbb{R} \overset{\text{бij.}}{\longleftrightarrow} \boxed{\chi_A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$$

→ јесте нека реална ф-ја

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases} \qquad A=\chi_A^{-1}(\{1\}).$$

$$\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$$

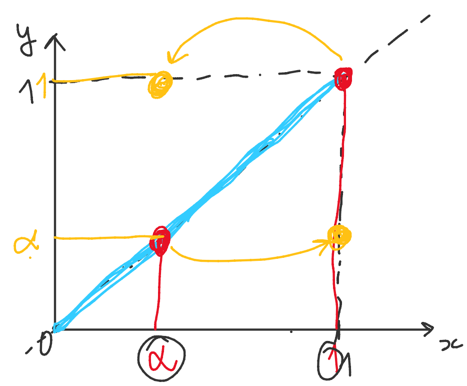
$$c < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = \mathrm{Card}(\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ је карактеристична ф-ја неког скупа}\}) \le \mathrm{Card}(\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\})$$

$$\mathrm{Card}(\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}) > \mathrm{Card}(\mathbb{R})$$

(4) $X=\{f:[0,1]\to[0,1] \mid f$ је бијекција и $f^{-1}=f\}$. Доказати да је X непребројив.

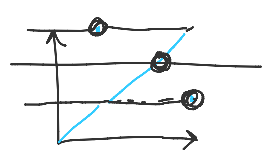
$Y\subseteq X$

↳ ф-је које нам одговарају



$$Y=\{f_\alpha:[0,1]\to[0,1] \mid \alpha\in[0,1)\} \subseteq X \;?$$

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1)\setminus\alpha\\ 1, & \alpha\\ \alpha, & 1\end{cases}$$



f_α бij! ✓

$$f_\alpha^{-1}(y)=\begin{cases}\alpha, & 1\\ 1, & \alpha\\ y, & y\in[0,1)\setminus\alpha\end{cases} = f_\alpha(y) \Rightarrow f_\alpha^{-1}=f_\alpha$$

$f_\alpha=y$ 1) $y=1 \Rightarrow x=\alpha$

2) $y=\alpha \Rightarrow x=1$

3) $y=x$

φ бијекција, $\varphi : \underline{[0,1)} \to Y$

$\varphi(\alpha) = f_\alpha$ → фја у скупу Y

На ✓ (по деф.)

1-1? $f_\alpha \neq f_\beta$? , $\boxed{\alpha \neq \beta}$

$$\left.\begin{array}{l} f_\alpha(\alpha) = 1 \\ f_\beta(\alpha) = \alpha, \text{ јер } \alpha \in [0,1) \setminus \beta \end{array}\right\} \Rightarrow f_\alpha \neq f_\beta$$

$\Rightarrow Card(Y) = Card([0,1)) = Card(\mathbb{R})$

$Y \subseteq X \Rightarrow Card(X) \geq Card(Y) = Card(\mathbb{R}) \Rightarrow X$ непребројив

$(A, +, 0)$ – група $\qquad (x + y \neq y + x)$

$$\left.\begin{array}{l} x + 0 = x \\ 0 + x = x \end{array}\right\}$$

$\underline{\exists(-x)}$ ↓ ознака $\qquad (-x) + x = 0$

$\qquad x + (-x) = 0$

51. Показати да за свако $x \in A$ где је $(A, +, 0)$ група важи $-(-x) = x$.

52. Показати да је симетрија $\sigma : (A, +, 0) \to (A, +, 0)$ дата са $\sigma(x) = -x$ изоморфизам структура. (A абелова група)

(51) $(A, +, 0)$ група

$-\boxed{(-x)} \overset{?}{=} x \qquad \underline{-y} = x$

$=: y$

инверзни елемент од (инверзног елем. од x) $= x$

→ $\underline{y = -x} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y + x = 0 \\ x + y = 0 \end{array}}$

→ Треба доказати: инверз од $\underline{y}$ једнак $\underline{x}$

$\Longleftrightarrow$

$\boxed{x + y = 0}$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+x=0 \end{array}}$$

инверзни елемент у групи је јединствен (*)

Абелова група
→ важи комутативност
$x+y=y+x, \forall x,y\in A$

(52) $\sigma:(A,+,0)\to(A,+,0)$ — Абелова група

$\sigma(x)=-x$ изоморфизам структура

бијекција

↳ слаже се са структуром ($+$, 0, $-$)

инверз

→ 1) $\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$

→ 2) $\sigma(0)=0$

→ 3) $\sigma(-x)=-\sigma(x)$

(1) бијекција

1–1: $\sigma(x)=\sigma(y)$

$\backslash\ -x=-y$

$$\underbrace{-(-x)}_{x}=\underbrace{-(-y)}_{y}\overset{(51)}{\Longrightarrow} x=y \checkmark$$

на: $\sigma(x)=y$?

узмемо $x=-y$:

$$\sigma(-y)=-(-y)\overset{(51)}{=}y \checkmark$$

(2) морфизам структура

1) $\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$

$\underbrace{-(x+y)}=(-x)+(-y)$

$\Longleftrightarrow$

$(x+\boxed{y})+(\boxed{(-x)}+(-y))=0 \Longleftrightarrow \underbrace{(x+(-x))}+\underbrace{(y+(-y))}=0 \Longleftrightarrow 0+0=0 \checkmark$

комутативност

$x=0$

$(x+0=x)$

$[((-x)+(-y))+(x+y)=0]$

исто ради

2) $\sigma(0) = 0$

$-0 = 0 \iff 0 + 0 = 0$ неутрал у $(A, +, 0)$

3) $\sigma(-x) = -\sigma(x)$

$-(-x) = -(-x)$ ✓