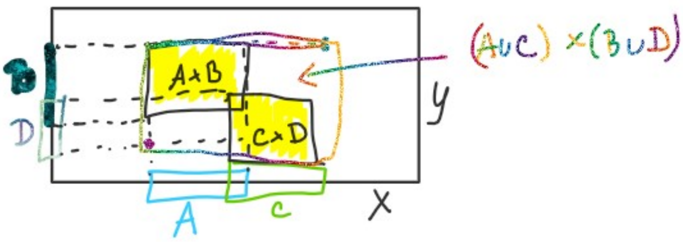
Четвртак 08.10.2020.

(4) а) $(A\times B)\cup(C\times D) \subseteq (A\cup C)\times(B\cup D)$

б) $\mathcal{P}(A\cup B) \supseteq \mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$



а) $t\in(A\times B)\cup(C\times D)$

$(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D)$

$\Leftrightarrow$

$(x,y)\in A\times B \vee (x,y)\in C\times D \Leftrightarrow$

$(x\in A \wedge y\in B) \vee (x\in C \wedge y\in D) \Leftrightarrow$

$(x\in A \vee x\in C) \wedge (x\in A \vee y\in D) \wedge (y\in B \vee x\in C) \wedge (y\in B \vee y\in D) \Leftrightarrow$

$1\wedge 2\wedge 3\wedge 4 \Rightarrow 1\wedge 4$

$\underbrace{x\in A\cup C}_{1} \wedge \underbrace{(x\in A \vee y\in D)}_{2} \wedge \underbrace{(y\in B \vee x\in C)}_{3} \wedge \underbrace{y\in B\cup D}_{4} \Rightarrow \quad \cancel{\Leftarrow}$

$\boxed{p\wedge q \Rightarrow p}$

$\Rightarrow \quad x\in A\cup C \wedge y\in B\cup D \Leftrightarrow (x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$

$\boxed{p \Rightarrow p\vee q}$

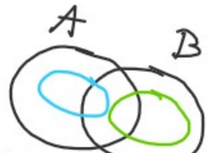
контрапример: $\boxed{\supseteq}$ $A=\{1\}$, $B=\{1\}$, $C=\{2\}$, $D=\{2\}$

$(A\times B)\cup(C\times D)=\{(1,1)\}\cup\{(2,2)\}=\{(1,1),(2,2)\}$ $\cap \cancel{\supseteq}$

$(A\cup C)\times(B\cup D)=\{1,2\}\times\{1,2\}=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

не важи!

б) $T\in\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B) \Leftrightarrow T\in\mathcal{P}(A) \vee T\in\mathcal{P}(B) \Leftrightarrow T\subseteq A \vee T\subseteq B$



$\Rightarrow \quad T\subseteq A\cup B \Leftrightarrow T\in\mathcal{P}(A\cup B)$

$\cancel{\Leftarrow}$

контрапример за $\boxed{\subseteq}$: $A=\{0,1\}$ $\quad$ $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(\{0,1,2\})=\{$ 8 елемената $\}$

$B=\{1,2\}$ $\quad$ $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)=\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$\{1,2,0\}\in\mathcal{P}(A\cup B)$

$\notin\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$

(5) Решити једначину по X:

$A\Delta$ $\quad A\Delta X=B$

$\Rightarrow \quad A\Delta(A\Delta X)=A\Delta B$

$(A\Delta A)\Delta X=A\Delta B$

$\emptyset\,\Delta X=A\Delta B$

$\boxed{X=A\Delta B}$ $\longrightarrow$ проверити да заиста важи

$A\Delta(A\Delta B)=B$

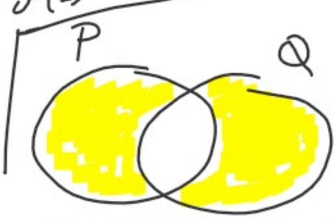
домаћи:

$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

$A\Delta A=(A\setminus A)\cup(A\setminus A)=\emptyset$

$\emptyset\Delta X=(\emptyset\setminus X)\cup(X\setminus\emptyset)$

$=\emptyset\cup X=X$



$P\Delta Q=\{x\in X \mid x\in P \boxed{\veebar} x\in Q\}$

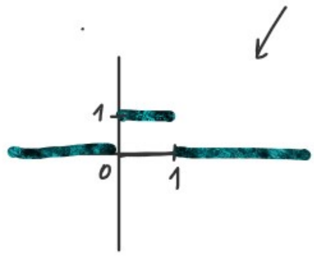
$\veebar$ - ексклузивна дисјункција

важи тачно 1 од 2 ствари

деф. $A\subseteq X$. Карактеристична функција скупа A је $\chi_A: X\longrightarrow\{0,1\}$ и

Деф. $A\subseteq X$. Карактеристична функција скупа A је $\chi_A : X \to \{0,1\}$ и

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$



пр. $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$ $\quad \chi_{[0,1]}(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$

пр. $\chi_\emptyset(x)=\begin{cases}1, & x\in\emptyset\\ 0, & x\notin\emptyset\end{cases} = \begin{cases}1, & x\in\emptyset\\ 0, & x\in X\end{cases} = 0$

пр. $\chi_X(x)=\begin{cases}1, & x\in X\\ 0, & x\notin X\end{cases} = \begin{cases}1, & x\in X\\ 0, & x\in\emptyset\end{cases} = 1$

БИТНО: $A,B\subseteq X$, $\quad A=B \iff \chi_A=\chi_B$

6) $A,B,A_1,A_2,\dots,A_n\subseteq X$. Познате су нам $\chi_A,\chi_B,\chi_{A_1},\dots,\chi_{A_n}$. Нађи χ за:

а) $A_1\cap\dots\cap A_n$

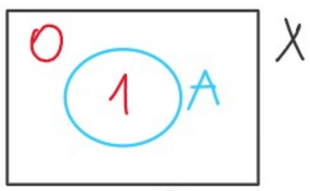
б) $A_1\sqcup\dots\sqcup A_n$

в) A^c

г) $A\setminus B$

д) $A\triangle B$

ђ) $A\cup B$



$\chi_{A_1}\cdot\chi_{A_2}$

а) $A_1\cap\dots\cap A_n=\{x\in X \mid (\forall k\in\{1,\dots,n\})\ x\in A_k\}$

$$\chi_{A_1\cap\dots\cap A_n}(x)=\begin{cases}1, & x\in A_1\cap\dots\cap A_n\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

$\chi_{A_1\cap\dots\cap A_n}(x)=1 \iff x\in A_1\cap\dots\cap A_n \iff (\forall k\in\{1,\dots,n\})\ x\in A_k$

$\iff (\forall k\in\{1,\dots,n\})\ \chi_{A_k}(x)=1$

$\iff \chi_{A_1}(x)\cdot\chi_{A_2}(x)\cdot\ldots\cdot\chi_{A_n}(x)=1$

$$\boxed{\chi_{A_1\cap\dots\cap A_n}=\chi_{A_1}\cdot\chi_{A_2}\cdot\ldots\cdot\chi_{A_n}}$$

б) $A_1\sqcup A_2\sqcup\dots\sqcup A_n$

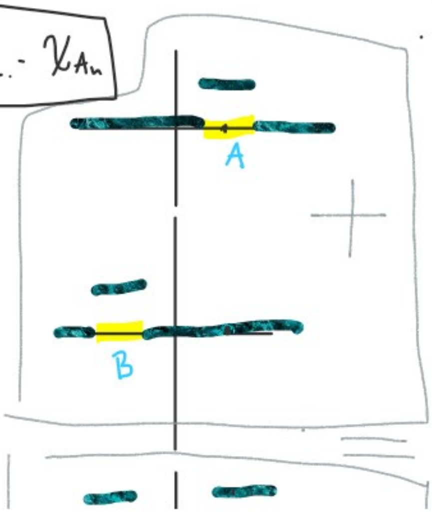
$\chi_{A_1\sqcup\dots\sqcup A_n}(x)=1$

$\iff$

$(\exists! \, k\in\{1,\dots,n\})\ \chi_{A_k}(x)=1$

$(\exists_1)$ → постоји тачно једно

$\iff$



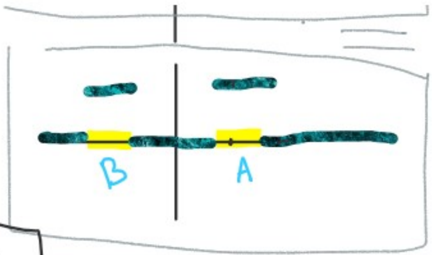
$A\sqcup B$ – дисјунктна унија

$A\sqcup B \iff A\cup B$, под условом да је $A\cap B=\emptyset$

(∃1) ⟶ постоји тачно

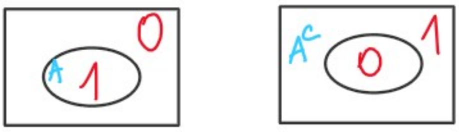
⟺ једно

$\chi_{A_1}(x)+\dots+\chi_{A_n}(x)=1$



$$\boxed{\chi_{A_1\sqcup A_2\sqcup\dots\sqcup A_n}=\chi_{A_1}+\dots+\chi_{A_n}}$$

в) A^c



0 ⟷ 1

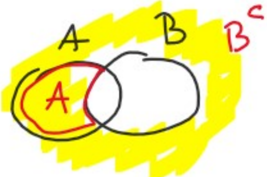
$\chi_{A^c}(x)=1 \iff x\in A^c$

$\iff x\notin A$

$\iff \neg(x\in A) \iff \neg(\chi_A(x)=1) \iff \chi_A(x)=0$

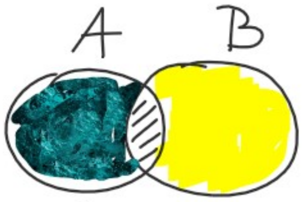
$$\boxed{\chi_{A^c}=1-\chi_A}$$

г) $A\setminus B = A\cap B^c$



$A\cap B^c = A\setminus B$

$$\chi_{A\setminus B} \underset{а)}{=} \chi_A\cdot\chi_{B^c} \underset{в)}{=} \chi_A\cdot(1-\chi_B)$$



д) $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\setminus B)\sqcup(B\setminus A)$

$(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset$

$$\chi_{A\Delta B}\underset{б)}{=}\chi_{A\setminus B}+\chi_{B\setminus A}\underset{г)}{=}\chi_A\cdot(1-\chi_B)+\chi_B(1-\chi_A)$$
$$=\chi_A+\chi_B-2\cdot\chi_A\chi_B$$

ђ) $A\cup B=(A\Delta B)\cup(A\cap B)=(A\Delta B)\sqcup(A\cap B)$

$$\chi_{A\cup B}\underset{б)}{=}\chi_{A\Delta B}+\chi_{A\cap B}\underset{д),а)}{=}\chi_A+\chi_B-2\chi_A\chi_B+\chi_A\chi_B=\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B$$

7) Доказати идентитете користећи χ:

а) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

б) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

в) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

г) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

а) $\chi_{A\cup(B\cap C)}=\chi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}$ ← идеја!

$$\chi_{A\cup(B\cap C)}=\chi_A+\chi_{B\cap C}-\chi_A\cdot\chi_{B\cap C}=\chi_A+\chi_B\cdot\chi_C-\chi_A\cdot\chi_B\chi_C \ ✓$$

$$\chi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}=\chi_{A\cup B}\cdot\chi_{A\cup C}=(\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B)\cdot(\chi_A+\chi_C-\chi_A\chi_C)=$$
$$=\chi_A^2+\chi_A\chi_C-\chi_A^2\chi_C+\chi_B\chi_A+\chi_B\chi_C-\chi_A\chi_B\chi_C-\chi_A^2\chi_B-\chi_A\chi_B\chi_C+\chi_A^2\chi_B\chi_C$$
$$=\chi_A+\chi_B\chi_C-\chi_A\chi_B\chi_C \ ✓$$

$\chi_A^2=\chi_A$

$0^2=0$

$\chi_A^2 = \chi_A$

$0^2 = 0$

$1^2 = 1$

$$= \chi_A + \chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C \checkmark$$

г) $\chi_{(A\cap B)^c} = 1 - \chi_{A\cap B} = 1 - \chi_A \cdot \chi_B \checkmark$

$$\chi_{A^c\cup B^c} = \chi_{A^c} + \chi_{B^c} - \chi_{A^c}\cdot\chi_{B^c} = (1-\chi_A) + (1-\chi_B) - (1-\chi_A)\cdot(1-\chi_B) =$$

$$= 1 - \chi_A + 1 - \chi_B - 1 + \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B =$$

$$= 1 - \chi_A\chi_B \checkmark$$

$$\Rightarrow (A\cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Деф. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_1, A_2, A_3, \ldots$

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \qquad \text{лимес инфериор}$$

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad \text{лимес супериор}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = (A_1\cap A_2\cap\ldots)\cup(A_2\cap A_3\cap\ldots)\cup\boxed{(A_3\cap A_4\cap\ldots)}\cup\ldots$$

$x \Rightarrow x$ је у неком $\Rightarrow x$ је у свакам почевши од неког индекса

$x \in \liminf A_n \iff x$ припада свима почевши од неког