- Нека је $a \in \mathbb{R}$ дат реалан број. Показати да је фамилија скупова
$$\mathcal{F}_a = \{A \subseteq \mathbb{R} \,:\, A \text{ је околина тачке } a\}$$
филтер на $\mathbb{R}$.
- Нека је $a \in \mathbb{R}$ дат реалан број. Показати да је фамилија скупова
$$\mathcal{F}_a^o = \{A \setminus \{a\} \,:\, A \in \mathcal{F}_a\}$$
филтер на $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Нека је $a \in \mathbb{R}$. Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ назива се ОКОЛИНОМ ТАЧКЕ a ако $\exists \delta > 0$ т.д. $(a-\delta, a+\delta) \subset A$.

- $\mathcal{F}_a$ – филтер околина $(S = \mathbb{R})$

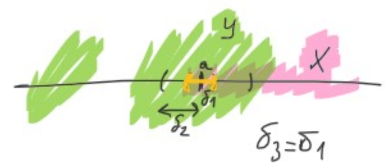
F1) $\mathbb{R} \in \mathcal{F}_a$ ✓ δ-произ. $(a-\delta, a+\delta) \subseteq \mathbb{R}$

F2) $\emptyset \in \mathcal{F}_a \Leftrightarrow (\forall \delta > 0)$ $(a-\delta, a+\delta) \not\subseteq \emptyset$ ✓ [ппс $(a-\delta, a+\delta) \subseteq \emptyset \Rightarrow (a-\delta, a+\delta) = \emptyset \Rightarrow \delta = 0$]

F3) $\boxed{\Rightarrow}$

$X, Y \in \mathcal{F}_a$

$\Rightarrow X, Y$ – околине $\Rightarrow (\exists \delta_1, \delta_2 > 0)$ $(a-\delta_1, a+\delta_1) \subseteq X$
$(a-\delta_2, a+\delta_2) \subseteq Y$



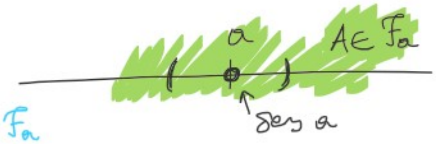
$?(\exists \delta_3 > 0)$ $(a-\delta_3, a+\delta_3) \subseteq X \cap Y$ ↳ треба нам да је околина

Узмемо: $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$:
$$\left.\begin{array}{l}(a-\delta_3, a+\delta_3) \subseteq (a-\delta_1, a+\delta_1) \subseteq X \\ (a-\delta_3, a+\delta_3) \subseteq (a-\delta_2, a+\delta_2) \subseteq Y\end{array}\right\} \Rightarrow (a-\delta_3, a+\delta_3) \subseteq X \cap Y$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $X \cap Y$ околина $(X \cap Y \in \mathcal{F}_a)$

$$(\exists \delta > 0) \quad (a-\delta, a+\delta) \subseteq X \cap Y \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(a-\delta, a+\delta) \subseteq X \\ (a-\delta, a+\delta) \subseteq Y\end{array}\right\} \overset{\text{деф.}}{\Rightarrow} X, Y \text{ околине } (X, Y \in \mathcal{F}_a)$$

- $\mathcal{F}_a^o = \{A \setminus \{a\} \mid A \in \mathcal{F}_a\}$ $(S = \mathbb{R} \setminus \{a\})$ домаћи: исто као за $\mathcal{F}_a$



83. Нека је $\mathcal{F}$ филтер на S и нека је ρ бинарна релација на скупу Y. Дефинишемо бинарну релацију $\rho_{\mathcal{F}}$ на Y^S са
$$f \rho_{\mathcal{F}} g \Leftrightarrow \{x \in S \,:\, f(x)\, \rho\, g(x)\} \in \mathcal{F}.$$
Показати да важи импликација: ρ је $(*) \Rightarrow \rho_{\mathcal{F}}$ је $(*)$, где $(*)$ може да буде својство $(R), (S)$ или (T). Одатле закључити да је $\rho_{\mathcal{F}}$ релација еквиваленције ако је ρ релација еквиваленције.

домаћи

$$f \rho_{\mathcal{F}} g \Leftrightarrow \{x \in S \, : \, f(x) \, \rho \, g(x)\} \in \mathcal{F}.$$

Показати даважи импликација: ρ је $(*) \Rightarrow \rho_{\mathcal{F}}$ је $(*)$, где $(*)$ може да буде својство $\boxed{(R), (S)}$ или (T). Одатле закључити да је $\rho_{\mathcal{F}}$ релација еквиваленције ако је ρ релација еквиваленције.

домаћи

$$Y^S = \{f : S \to Y\}$$

(T) : ρ је $(T) \Rightarrow \underline{\rho_{\mathcal{F}} \text{ је } (T)}$

$$\underline{f \rho_{\mathcal{F}} g \wedge g \rho_{\mathcal{F}} h} \overset{?}{\Rightarrow} f \rho_{\mathcal{F}} h$$

$$f \rho_{\mathcal{F}} g \wedge g \rho_{\mathcal{F}} h \Rightarrow \{x \in S \mid \underbrace{f(x)}_{\in Y} \, \rho \, \underbrace{g(x)}_{\in Y}\} \in \mathcal{F} \wedge \{x \in S \mid g(x) \, \rho \, h(x)\} \in \mathcal{F}$$

$$\overset{(F3)}{\Rightarrow} \boxed{\{x \in S \mid f(x) \, \rho \, g(x)\} \cap \{x \in S \mid g(x) \, \rho \, h(x)\} \in \mathcal{F}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\{x \in S \mid f(x) \, \rho \, g(x) \wedge g(x) \, \rho \, h(x)\} \in \mathcal{F}}$$

$$\overset{\rho (T)}{\Rightarrow} \{x \in S \mid f(x) \, \rho \, h(x)\} \in \mathcal{F}$$

$\Rightarrow \rho_{\mathcal{F}}$ је (T)

$$\Rightarrow f \rho_{\mathcal{F}} h$$

Деф: Нека је $\mathcal{F}$ филтер на скупу S и $f : S \to \mathbb{C}$. Комплексан број $\alpha \in \mathbb{C}$ је ЛИМЕС ПРЕСЛИКАВАЊА f ПО ФИЛТЕРУ $\mathcal{F}$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ важи да је $\underline{|f - \alpha| <_{\mathcal{F}} \varepsilon}$.

Тада пишемо
$$\alpha = \lim_{\mathcal{F}} f.$$

Другим речима

$$\alpha = \lim_{\mathcal{F}} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0) \, |f - \alpha| <_{\mathcal{F}} \varepsilon$$

$$\boxed{\rho_{\mathcal{F}}} = \boxed{<_{\mathcal{F}}}$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \{x \in S : \boxed{|f(x) - \alpha| < \varepsilon}\} \in \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \; f^{-1}(B(\alpha; \varepsilon)) \in \mathcal{F}$$

$B(\alpha; \varepsilon)$ – отворени диск у комплекс. равни $= \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < \varepsilon\}$

Још једна деф: $\forall$ околину U тачке α важи $\{x \in S \mid f(x) \in U\} \in \mathcal{F}$

скрипта: 347, 348 стр.

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{F}$

$S = \mathbb{N}$

84. Нека је $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ комплексних бројева, односно пресликавање $\boxed{z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}}$. Показати да важи $z_\infty = \lim_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} z$ ако и само ако

$$\boxed{(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)|z_n - z_\infty| < \varepsilon.}$$

$z_n = z(n)$

Приметимо да је $\lim_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} z$ лимес пресликавања z по Фрешеовом филтеру $\mathcal{F}_\mathbb{N}$.

$\mathbb{C}$ — ознака! за број

$z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ низ

$\underbrace{z(1)}, z(2), z(3), \dots \in \mathbb{C}$

$z_1, z_2, z_3, \dots \in \mathbb{C}$

ознака

$$\mathcal{F}_\mathbb{N} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A^c = \mathbb{N} \setminus A \text{ коначан}\}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ треба: $(\forall \varepsilon > 0)$ $\{n \in \mathbb{N} \mid |\overset{z(n)}{z_n} - z_\infty| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}_\mathbb{N} \iff \underbrace{\{n \in \mathbb{N} \mid |z_n - z_\infty| < \varepsilon\}^c}_{\varepsilon = \varepsilon_1}$ коначан

узмемо $\varepsilon_1 > 0$ произвољно

$\boxed{}$ $\to$ узмемо $\varepsilon = \varepsilon_1$: $(\exists \underset{\text{фиксно}}{n_0} \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\, |z_n - z_\infty| < \varepsilon_1$

може и за неке испред да важи

$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$
$\parallel$
$\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$
$\cap$
$\{n \in \mathbb{N} \mid |z_n - z_\infty| < \varepsilon_1\}$

c

$(A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c)$

$\Rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid |z_n - z_\infty| < \varepsilon_1\}^c \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}^c = \underbrace{\{n \in \mathbb{N} \mid n < n_0\}}_{\text{коначан}}$

$\Rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid |z_n - z_\infty| < \varepsilon_1\}^c$ коначан ✓

$\boxed{\Rightarrow}$ Треба $\boxed{}$. Узмемо $\varepsilon_1 > 0$ произвољно.

$z_\infty = \lim_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} z \iff (\forall \varepsilon > 0)$ $\{n \in \mathbb{N} \mid |z_n - z_\infty| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}_\mathbb{N}$

$\Downarrow$

$\{n \in \mathbb{N} \mid |z_n - z_\infty| < \varepsilon\}^c$ коначан

узмемо $\underline{\varepsilon = \varepsilon_1}$: $\{n \in \mathbb{N} \mid |z_n - z_\infty| < \varepsilon_1\}^c$ коначан $(\subseteq \mathbb{N})$

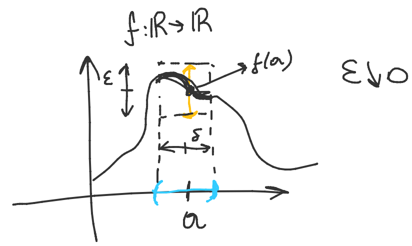
$\Rightarrow (\exists N_0 \in \mathbb{N})$ $\{n \in \mathbb{N} \mid |z_n - z_\infty| < \varepsilon_1\}^c \subseteq \{1, 2, \dots, N_0\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq N_0\} /^c$

$\{n \in \mathbb{N} \mid \underbrace{n > N_0}_{n \geq N_0 + 1}\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid |z_n - z_\infty| < \varepsilon_1\}$

$$n \geq \underbrace{N_0+1}_{n_0} \Rightarrow |z_n - z_\infty| < \varepsilon_1$$

$$(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_0 = N_0+1)(\forall n \geq n_0)\ |z_n - z_\infty| < \varepsilon_1 \quad ✓$$

Нека је $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ и $a \in \mathbb{R}$. Кажемо да је функција f непрекидна у тачки a ако постоји $\lim\limits_{\mathcal{F}_a} f$ где је $\mathcal{F}_a$ филтер околина тачке a. Ознака $\underbrace{f\,C\,a}_{\to \text{continuity}}$



85. Доказати да је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ непрекидна у тачки $a \in \mathbb{R}$ ако и само ако

$$\underbrace{(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)}_{\varepsilon-\delta \text{ услов}}(\forall x \in \mathbb{R})|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Подсетимо се да је по дефиницији функција f непрекидна у тачки a ако постоји њен лимес по филтеру $\mathcal{F}_a$ околина тачке a.

↳ само $\exists$, не и да је $= f(a)$

$\boxed{\Leftarrow}$ Доказаћемо $\lim\limits_{\mathcal{F}_a} f = \boxed{f(a)} \to$ конкретан број

треба нам: $\underbrace{(\forall \varepsilon > 0)\ \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x) - f(a)| < \varepsilon\}}_{\text{околина}} \in \mathcal{F}_a \ \Big\}\ ?\ (\exists \delta > 0)\ (a-\delta, a+\delta) \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x) - f(a)| < \varepsilon\}$

узмемо исто δ

$(a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \delta\}$

знамо: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$\boxed{\Rightarrow}$ знамо: $\exists \lim\limits_{\mathcal{F}_a} = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x) - b| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}_a \overset{\text{околина}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$
$(a-\delta, a+\delta) \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x) - b| < \varepsilon\}$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\underbrace{(\forall x \in \mathbb{R})\ |x - a| < \delta}_{\downarrow} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \quad (*)$$

узмемо $x = a$

$|x-a| = |a-a| = 0 < \delta \Rightarrow \boxed{|f(a) - b| < \varepsilon}$

за произвољно $\varepsilon > 0$!

ако $f(a) \neq b$: узмемо $\varepsilon = \dfrac{|f(a) - b|}{2}$

и не важи $|f(a) - b| < \dfrac{|f(a) - b|}{2}$

ако $f(a) \neq b$: узмемо $\varepsilon = \frac{|f(a)-b|}{2}$

и не важи $|f(a)-b| < \frac{|f(a)-b|}{2}$

$\Rightarrow |f(a)-b| < 0$ ↯

$\Rightarrow \boxed{f(a) = b}$

Препишемо услов (*) за $b = f(a)$: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ✓

(ε-δ услов)