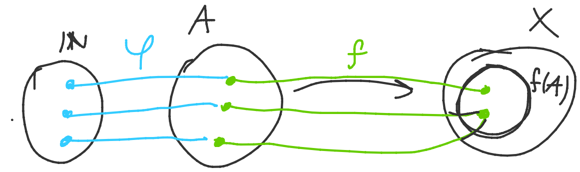
Петак 06.11.2020.

46. Показати да је слика пребројивог скупа највише пребројив скуп.

$f: A \to X$, $A \sim \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $f(A)$ највише пребројив → коначан $\vee$ пребројив

$\exists \varphi: \mathbb{N} \to A$ бијекција

Претпоставимо да није коначан $\Rightarrow$ доказаћемо да је пребројив ? $g: \mathbb{N} \to f(A)$



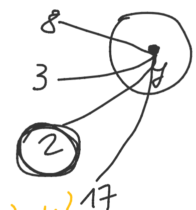
$\psi = f \circ \varphi : \mathbb{N} \to A \to f(A)$ на

(јер је φ бијекција, а са f погађамо сваки ел. из $f(A)$)

$\sigma: f(A) \to \mathbb{N}$

∄ min(0,1)

$\sigma(y) = \min \underbrace{\boxed{\psi^{-1}}(\{y\})}_{\subseteq \mathbb{N}}$ → добро деф. → $\exists \min$



→ није инверз од ψ (тада није бијекција)

јесте инверзна слика од ψ

$\psi^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{N} \mid \psi(x) = y\}$

$\psi: \mathbb{N} \to f(A)$, $y \in f(A)$

σ је 1-1?

$\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$

$\to \min \psi^{-1}(\{x_1\}) = \min \psi^{-1}(\{x_2\})$

$\min \{n \in \mathbb{N} \mid \psi(n) = x_1\} = \min \{n \in \mathbb{N} \mid \psi(n) = x_2\} = m$

$m \in \{n \in \mathbb{N} \mid \psi(n) = x_1\}$ и $m \in \{n \in \mathbb{N} \mid \psi(n) = x_2\}$ $\Rightarrow$ $\psi(m) = x_1$, $\psi(m) = x_2$ $\Downarrow$ $x_1 = x_2$ ✓

[$\Rightarrow$ Card $f(A) \leq$ Card $\mathbb{N}$]

$\Rightarrow$ $f(A)$ можемо да посматрамо као подскуп од $\mathbb{N}$.

→ коначан $\vee$ пребројив

предавања

$X \subseteq \mathbb{N}$ (згодна чињеница)

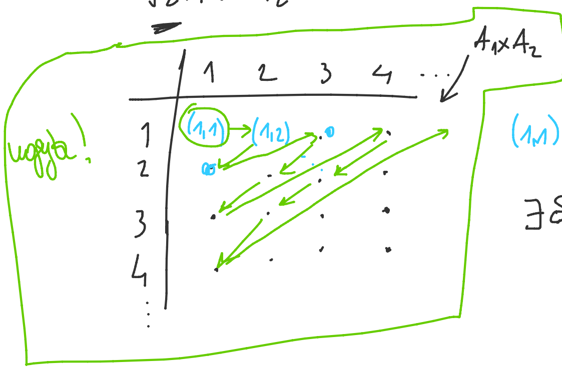
Треба показати: X је највише пребројив

47. Показати да је Декартов производ два пребројива скупа пребројив скуп.

48. Показати да је пребројива унија пребројивих скупова пребројив скуп.

(47) A_1, A_2 - пребројиви $\Rightarrow$ $A_1 \times A_2$ - пребројив

$f_1 : \mathbb{N} \to A_1$
$f_2 : \mathbb{N} \to A_2$ бијекције $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\exists ?\ g : \mathbb{N} \to A_1 \times A_2$?



$(1,1) \to (1,2) \to (2,1) \to (1,3) \to (2,2) \to (3,1) \to (1,4) \to (2,3) \to (3,2) \to (4,1) \to \dots$

$\exists$ бијекција из $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Означимо је са ψ.

$\psi(n) = ?$ - тешко је записати, али нам је јасно

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "f_1\times f_2"] & A_1 \times A_2 \end{tikzcd}$$

$(f_1 \times f_2)(n_1, n_2) = (f_1(n_1), f_2(n_2))$

$g : \mathbb{N} \to A_1 \times A_2$, $g(n) = \underline{(f_1 \times f_2)} \circ \psi(n)$ ↳ биј ✓

$f_1 \times f_2$ биј? 1-1: $(f_1\times f_2)(n_1,n_2) = (f_1\times f_2)(m_1,m_2) \Rightarrow (f_1(n_1), f_2(n_2)) = (f_1(m_1), f_2(m_2))$

$\Rightarrow f_1(n_1) = f_1(m_1) \wedge f_2(n_2) = f_2(m_2)$

$\Rightarrow n_1 = m_1 \wedge n_2 = m_2$

$\Rightarrow (n_1, n_2) = (m_1, m_2)$ ✓

На: $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

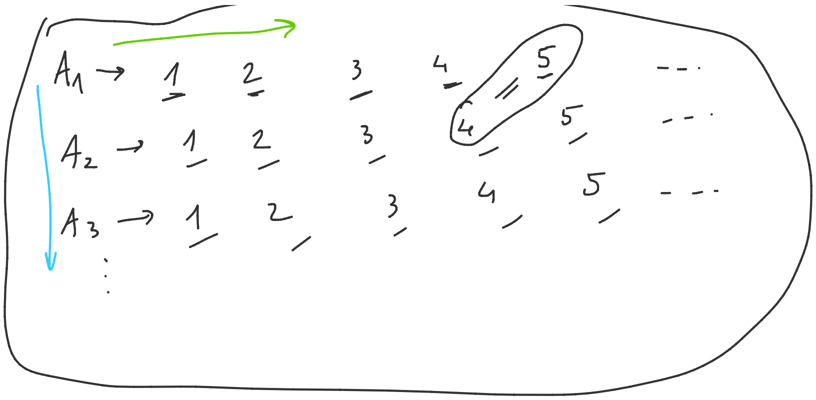
$\left.\begin{array}{l} \exists t_1,\ f(t_1) = n_1 \\ \exists t_2,\ f(t_2) = n_2 \end{array}\right\}$ f_1, f_2 биј

$(f_1 \times f_2)(t_1, t_2) = (f_1(t_1), f_2(t_2)) = (n_1, n_2)$ ✓

$f_1 \times f_2,\ \psi$ биј $\Rightarrow$ g биј.

(48) $\left.\begin{array}{l} \{A_i\}_{i\in I} \\ I \text{ - пребројив} \\ (\forall i \in I)\ A_i \text{ - пребројив} \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ пребројив

идеја: $A_{i_0} \overset{1)}{\subseteq} \bigcup A_i \overset{2)}{\subseteq} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$



идеја: $A_{i_0} \overset{1)}{\subseteq} \bigcup_{i\in I} A_i \overset{2)}{\subseteq} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$A_{i_0} \to \mathbb{N}$, $\quad \mathbb{N} \to I$, $\quad \mathbb{N} \to A_i$

Теорема: (Кантор-Бернштајнова теорема)

$\underline{Card(A) \leq Card(B)} \wedge Card(B) \leq Card(A) \Rightarrow Card(A) = Card(B)$

$\exists$ инј $A \to B$ (1-1).

1) $\underline{A_{i_0}} \subseteq \underline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, $i_0 \in I \Rightarrow \exists j: A_{i_0} \hookrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ утапање

$j(a) = a$, $\quad \underline{j \text{ 1-1}}$

$$\Rightarrow Card(A_{i_0}) \overset{(1)}{\leq} Card\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$$

$$Card(A_{i_0}) = Card(\mathbb{N})$$

2) $\bigcup_{i\in I} A_i \text{ „}\overset{?}{\subseteq}\text{"} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

f инјективно? (1-1) $\qquad f: \bigcup_{i\in I} A_i \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$f(x) = (g(\tilde{i}), \tilde{f}_i(x))$$

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow (\exists \tilde{i} \in I)\ A_{\tilde{i}} \ni x.$$

нисам добро деф. ово f пресликавање које $\tilde{i}$ да узмем?

$(J \subseteq I)\ x \in A_j, \forall j \in J$

$\underline{g(J) \subseteq \mathbb{N}} \to \exists$ мин инј узмемо оно $j \in J$

$g(j_0) = \min g(J)$.

$\exists \tilde{f}_i : A_{\tilde{i}} \to \mathbb{N}$ бij.

$\exists g: I \to \mathbb{N}$ бij.

$\exists$ за $X \subseteq \mathbb{N}$

$\boxed{j_0 = g^{-1}(\min g(J))}$

f је 1-1? $\qquad f(x_1) = f(x_2)$

$\tilde{i}_1 \qquad \tilde{i}_2$

$$(g(\tilde{i}_1), \tilde{f}_{\tilde{i}_1}(x_1)) = (g(\tilde{i}_2), \tilde{f}_{\tilde{i}_2}(x_2))$$

$$g(\tilde{i}_1) = g(\tilde{i}_2) \Rightarrow \underline{\tilde{i}_1 = \tilde{i}_2}$$

$$\tilde{f}_{\tilde{i}_1}(x_1) = \tilde{f}_{\tilde{i}_2}(x_2) = \tilde{f}_{\tilde{i}_1}(x_2)$$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ ✓

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \text{Card}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \le \text{Card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{N})$

(1),(2) + КБ $\Rightarrow$ $\text{Card}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \text{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ (алеф нула)

49. Показати да сваки непразан подскуп од $\mathbb{N}$ има минимум (у односу на уређење $\le$). → користими у претходним зад.

↳ well ordering principle
→ добро уређење ($\mathbb{N}$ је добро уређен)

индукцијом. $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$

(ППС)

ако $1 \in A \Rightarrow (1 \le \mathbb{N}) \Rightarrow 1 = \min A$ ✓

ако $1 \notin A$: $2 \in A$? $\Rightarrow 2 = \min A$ ✓

ако $2 \notin A$: $3 \in A$? $\Rightarrow 3 = \min A$ ✓

идеја доказа

ППС A нема минимум → доказујемо да је $A = \emptyset$

доказујемо (индукцијом) $1, 2, \dots, n \in A^c \Rightarrow n+1 \in A^c$

БАЗА: $1 \in A^c \Rightarrow 2 \in A^c$ ✓

ХИП:

КОРАК: $1, \dots, n+1 \in A^c \overset{?}{\Rightarrow} n+2 \in A^c$

ППС $n+2 \notin A^c \Rightarrow n+2 \in A$

пошто $1, \dots, n+1 \notin A$ $\Big\}$ $\Rightarrow n+2 \le A \Rightarrow n+2 = \min A$ ↯

$\Rightarrow n+2 \notin A$ ↯

доказали!

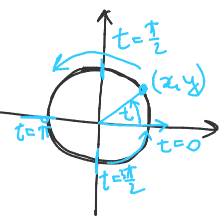
Сви елем. од $\mathbb{N}$ су у $A^c \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq \underset{\subseteq \mathbb{N}}{A^c} \Rightarrow \mathbb{N} = A^c \Rightarrow A = \emptyset$. ↯

50. Показати да су скупови $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]$ и $(-\infty, 1)$ исте кардиналности. → функције

⊛ $S^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ → непребројив скуп $\mathrm{Card}(S^1) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$

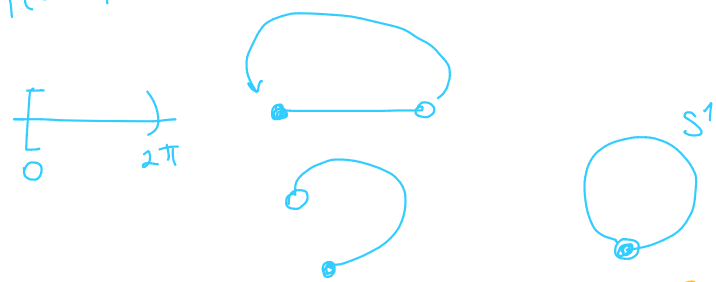
„1д сфера"

S^2: 2д сфера



$(x,y)\in S^1 \iff \begin{matrix} x=\cos t \\ y=\sin t \end{matrix}\ ,\ t\in[0,2\pi)$

$S^1=\{(\cos t,\sin t) \mid t\in[0,2\pi)\}$



идеја $S^1 \xrightarrow{\text{биј}} [0,2\pi) \xrightarrow[\text{биј}]{g} \mathbb{R}$

$t \mapsto g(t)$

$f(x,y) = f(\cos t,\sin t) = g(t)$

$(x,y)\in S^1 \Rightarrow (\exists_1 t\in[0,2\pi))\ \begin{matrix} x=\cos t \\ y=\sin t \end{matrix}$

доволно: ~~конструисати~~ доказати да $\exists$ g

$g:[0,2\pi)\to\mathbb{R}$ биј.

$\Downarrow$ следи

f биј. $\Rightarrow \mathrm{Card}(S^1) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}([0,2\pi))$.

видите како је урађено за $[0,1)$ и $\mathbb{R}$.