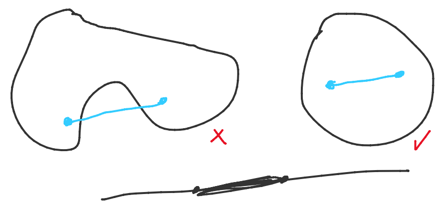
Петак 04.12.2020.

75. Показати да је скуп $J \subset \mathbb{R}$ интервал ако и само ако за свака два броја $a, b \in J$ таква да је $a < b$ важи $[a, b] \subset J$.

(скрипта стр. 21)

(*) скуп у $\mathbb{R}$ је интервал $\Leftrightarrow$ је конвексан



$\boxed{\Rightarrow}$ J интервал, $a, b \in J$

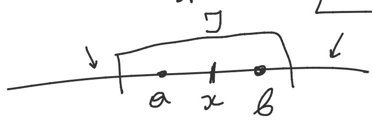
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} \subseteq J = \{x \in \mathbb{R} \mid c \le x \le d\}$$

c: $-\infty$, d: $\vee \infty$

- тривијално

$\boxed{\Leftarrow}$ 1° J неограничено (са обе стране)

Доказујемо $J = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



$x \in \mathbb{R}$ произвољно $\Rightarrow$ $(\exists a, b \in J)$ $a < x < b$

$\Downarrow$

$x \in J$ (јер $[a,b] \subseteq J$)

Јер ако не би: било би нпр. $(\forall a, b \in J)$ $\neg(a < x < b)$

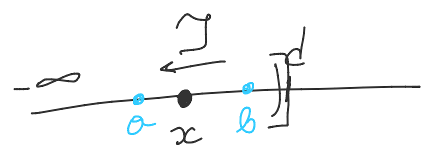
$a \ge x \vee x \ge b$

$\Rightarrow x$ је ограничење (Д, Г) ↯

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in J \Rightarrow J = \mathbb{R}$

2° J огр. одоздо, али није одозго

$\hookrightarrow \sup J = d$



$x \in \mathbb{R}$, $x < d$, произвољно $\overset{(\#)}{\Rightarrow}$ $(\exists a, b \in J)$ $a < x < b$ $\Rightarrow$ $x \in J$

Јер ако ово не важи (#): сви из J су са исте стране од x: 1) $(\forall a, b)$ $a, b < x$

$\Rightarrow x$ је ГО, $x < d$ ↯

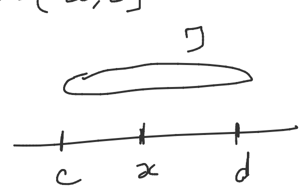
јер је d најмање ГО

2) $(\forall a, b)$ $a, b > x$

$\Rightarrow x$ је ДО ↯

J неограничен

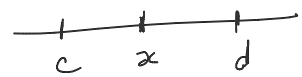
$(x < d \Rightarrow x \in J)$. То значи $J = (-\infty, d)$ $\vee$ $J = (-\infty, d]$ ✓



3° J ограничено и одозго и одоздо

$\sup J = d$

3° J ограничено и одозго и одоздо



$$\sup J = d$$
$$\inf J = c$$

$x \in \mathbb{R}$ произвољно тд. $c < x < d$.

$\boxed{(\exists a, b \in J)\ a < x < b}$ → зашто?

Дакле,
$$c < x < d$$
$$\Downarrow$$
$$x \in J$$

Што значи $J = (c,d)$, $[c,d)$, $(c,d]$, $[c,d]$.

4° J огр. одоздо, неогр. одозго (слично као 2°)

76. Нека је n природан број. Наћи $\inf\{x^n \mid x > 1\}$ у скупу $(\mathbb{R}, \leq)$.

Графички

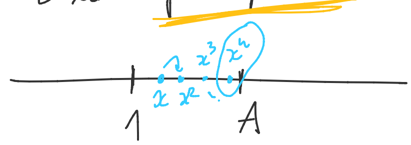
Хоћемо $\inf\{x^n \mid x > 1\} = 1$

1) Доње ограничење: $x > 1$, $x^n \overset{?}{\geq} 1$

$$x^2 > x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \quad / \cdot x$$
$$\Downarrow$$
$$x^3 > x > 1 \quad / \cdot x$$
$$\Downarrow$$
$$x^4 > x > 1$$
$$\vdots \quad \text{(индукција)}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ x^n > 1$$

2) Највеће такво. Претпоставимо да $\exists$ веће доње ограничење – инф. $A > 1$.



идеја: наћи довољно мало $x > 1$ тд $1 < x^n < A$.

$x > 1$: $x = 1 + \varepsilon$ → наћи довољно мало $\varepsilon > 0$ тд:

$$(1+\varepsilon)^n < A \qquad 1+\varepsilon, A > 1 \Rightarrow \text{коренујемо}$$

$$1 + \varepsilon < A^{1/n} = \sqrt[n]{A} \qquad \sqrt[n]{A} > 1, \text{ јер иначе ако је}$$

$\varepsilon < \sqrt[n]{A} - 1$ $\qquad \sqrt[n]{A} \leq 1 \ /^n$

$1+\varepsilon < A^{1/n} = \sqrt[n]{A}$

$\varepsilon < \underbrace{\sqrt[n]{A}-1}_{>0}$

$\sqrt[n]{A} > 1$, јер иначе ако је $\sqrt[n]{A} \le 1$ $/^n$

$\Rightarrow A \le 1$ ↯

узмимо $\varepsilon = \frac{\sqrt[n]{A}-1}{2}$: $\left(x = \frac{\sqrt[n]{A}+1}{2}\right)$

$$x^n = \left(\frac{\sqrt[n]{A}+1}{2}\right)^n < \left(\frac{\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{A}}{2}\right)^n = \left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A$$

$x^n < A$ $\Rightarrow$ A није ДО ↯

77. Нека је $a > 0$ реалан позитиван број. Дефинишемо функцију $\psi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^*_+$ са $\psi(q) = a^q$. Показати да функција строго расте за $a > 1$ док за $a < 1$ строго опада. Показати да је функција константна када је $a = 1$.

ψ – степеновање броја a рационалним

- $a > 1 \Rightarrow \psi$ строго расте

$\varphi_n : x \mapsto x^n$ $(= \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n})$

$q = \frac{m}{n}$: $\varphi_q : x \mapsto x^q$

$$\varphi_q = \underbrace{\varphi_m}_{x \mapsto x^m} \circ \underbrace{(\varphi_n)^{-1}}_{x \mapsto \sqrt[n]{x}} : x \mapsto \sqrt[n]{x} \mapsto \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = x^{\frac{m}{n}} = x^q$$

$$\boxed{q_1 < q_2 \Rightarrow \psi(q_1) < \psi(q_2)}$$

$a^{q_1} < a^{q_2}$

$(\exists c \in \mathbb{N})$ $q_1 = \frac{b}{c}$ и $q_2 = \frac{d}{c}$ (нпр. $c =$ НЗС (именилаца) нпр. $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4} \to \frac{8}{12}$ и $\frac{9}{12}$)

$a^{q_1} = \left(\sqrt[c]{a}\right)^b$, $a^{q_2} = \left(\sqrt[c]{a}\right)^d$

$q_1 < q_2 \Rightarrow \frac{b}{c} < \frac{d}{c} \Rightarrow \boxed{b < d}$ $\Rightarrow d - b > 0$

$\sqrt[c]{a} \le 1$ $/^{c}$ ($c \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow a \le 1^c = 1$ ↯)

$$q_1 < q_2 \Rightarrow \frac{b}{c} < \frac{d}{c} \Rightarrow \boxed{b<d}$$

$$a>1 \Rightarrow \sqrt[c]{a} > 1 \qquad \left(\text{ако } \sqrt[c]{a} \le 1 \ \Big/^{c \in \mathbb{N}} \Rightarrow a \le 1^c = 1 \ \text{↯} \right)$$

$$(\sqrt[c]{a})^b = (\sqrt[c]{a})^b \cdot \underbrace{1^{d-b}} < (\sqrt[c]{a})^b \cdot \underbrace{(\sqrt[c]{a})^{d-b}} = (\sqrt[c]{a})^d \Rightarrow a^{q_1} < a^{q_2}$$

$$\sqrt[c]{a} > 1 \ \Big/^{d-b} \Rightarrow (\sqrt[c]{a})^{d-b} > 1$$

2) $a<1$
3) $a=1$ } домаћи

78. Показати да је функција exp_a изоморфизам структуре $(\mathbb{R}, +, \le, 0)$ на $(\mathbb{R}^*_+, \cdot, \le, 1)$ за $a > 1$.

скрипта, стр 57, тврђење 3

$$exp_a(x) = a^x$$

бијекција + морфизам структура

1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

2) $x \le y \Rightarrow a^x \le a^y$

3) $a^0 = 1$

$$exp_a(x+y) = exp_a(x) \cdot exp_a(y)$$

$$exp_a(0) = 1$$

Став: Нека је $a \in \mathbb{R}$ и $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција. Следећи услови су еквивалентни

а) $f = \chi_a \qquad (f(x) = a \cdot x)$

б) (i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ← адитивна

(ii) f је ограничена на неком правом ограниченом интервалу I

(iii) $f(1) = a$.

} Кошијева функ. једначина

$$(a+b)^2 \cancel{=} a^2 + b^2$$

$$a^1 + b^1 = (a+b)^1$$

79. Нека је дата функција $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ и реалан позитиван број a различит од јединице. Показати да су услови (а) и (б) еквивалентни.

(а) $f = \log_a$

(б) – $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$,
– f је ограничена на неком правом ограниченом интервалу I,
– $f(a) = 1$.

идеја: уочити фју на коју можемо применити став!

(а) ⇒ (б) $\qquad f = \log_a$

$$y = \log_a x \iff x = a^y = exp_a(y)$$

- $\log_a(x\cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \iff x\cdot y \overset{?}{=} \exp_a(\log_a(x) + \log_a(y)) = \exp_a(\log_a(x)) \cdot \exp_a(\log_a(y)) = x\cdot y$

- $\log_a$ огр $\iff$ $\exp_a$ огр.

- $\log_a(a) = 1 \iff a = \exp_a(1) = a^1$ ✓

(б) $\Rightarrow$ (а) $\quad g = f\circ \exp_a \qquad g(x) = f\circ\exp_a(x) = f(a^x)$

f - важи својства из (б)

Доказујемо да за g важи став.

б1) $g(x+y) = g(x) + g(y)$?

$$f(\exp_a(x+y)) \overset{?}{=} f(\exp_a(x)) + f(\exp_a(y))$$

$f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$

$$f(\exp_a(x+y)) = f(a^{x+y}) = f(a^x\cdot a^y) = f(a^x) + f(a^y)$$

$$\Downarrow$$

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

б2) $\left.\begin{array}{l} f \text{ огр.} \\ \exp_a \text{ огр} \end{array}\right\}$ на $I \Rightarrow g$ огр. на I

б3) $g(1) = f(a^1) = f(a) = 1 \qquad f(a) = 1$

$\Rightarrow$ (став за $a=1$) $\quad g = x_1 \quad .\ g(x) = 1\cdot x = x$

$$\underbrace{f(a^x) = x}_{\text{инверзна од } \exp_a} \iff \boxed{f = \log_a}$$

80. Нека је дата функција $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ и $p \in \mathbb{R}$. Показати да су услови (а) и (б) еквивалентни.

(а) $f(x) = x^p$ за све $x \in \mathbb{R}_+^*$,

(б) – $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$,

– f је ограничена на неком правом ограниченом интервалу I,

– $\log_2 f(2) = p$.

слично као претходни, посматрати $g = \log_2 \circ f \circ \exp_2$

$f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$

укратко: (а) ⇒ (б) – домаћи

(б) ⇒ (а) – $g(x+y) = \log_2 \circ f(2^{x+y}) = \log_2 \circ f(2^x \cdot 2^y) = \log_2(f(2^x)\cdot f(2^y)) =$

$= \log_2(f(2^x)) + \log_2(f(2^y)) = g(x) + g(y)$

– ✓

– $g(1) = \log_2(f(2^1)) = \log_2(f(2)) = p$

⇒ важи став (за $a = p$)

⇒ $g = \chi_p$

$\log_2(f(2^x)) = p \cdot x$

$f(2^x) = 2^{p\cdot x} = (2^x)^p$

$2^x = y$ $\quad f(y) = y^p$ ✓

Филтери

Деф: филтер на скупу S је подскуп $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ који има следећа својства

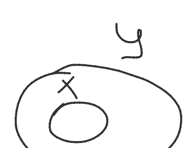
F1 (1) $S \in \mathcal{F}$

F2 (2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

F3 (3) $X \in \mathcal{F} \wedge Y \in \mathcal{F} \Leftrightarrow X \cap Y \in \mathcal{F}$

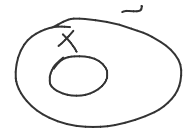
81. Показати да је својство (3) из дефиниције филтера $\mathcal{F}$ еквивалентно са $(3i) \wedge (3ii)$ где је

$$(3i) X \in \mathcal{F} \wedge Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{F}$$
$$(3ii) X \in \mathcal{F} \wedge X \subseteq Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}.$$



(3) ⇒ (3i) ✓ ([illegible] у (3))

$(3ii) X \in \mathcal{F} \wedge X \subseteq Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$.



$(3) \Rightarrow (3i)$ ✓ (већ садржано у (3))

$(3) \Rightarrow (3ii)$ $\quad X \in \mathcal{F} \wedge X \subseteq Y \overset{?}{\Rightarrow} Y \in \mathcal{F}$

$(3) \Leftarrow$ за X и Y: $\underline{X \cap Y} = X \in \mathcal{F} \Rightarrow X \in \mathcal{F} \wedge \boxed{Y \in \mathcal{F}}$ ✓

$(3i) \wedge (3ii) \Rightarrow (3)$: $\boxed{\Rightarrow}$ већ садржано у $(3i)$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\quad X \cap Y \in \mathcal{F} \overset{?}{\Rightarrow} X \in \mathcal{F} \wedge Y \in \mathcal{F}$

X, Y произвољни

$$\left.\begin{array}{l} X \cap Y \in \mathcal{F} \wedge X \cap Y \subseteq X \Rightarrow X \in \mathcal{F} \\ X \cap Y \in \mathcal{F} \wedge X \cap Y \subseteq Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F} \end{array}\right\} ✓$$

- Ако је $S \neq \emptyset$ онда је $\mathcal{F} = \{S\}$ филтер на S.

F1) $S \in \mathcal{F} \Leftrightarrow S \in \{S\}$ ✓

F2) $\emptyset \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow \emptyset \notin \{S\}$

F3) $\boxed{\Rightarrow}$ $\quad \underbrace{X, Y \in \mathcal{F}} \overset{?}{\Rightarrow} X \cap Y \in \mathcal{F}$

$X, Y \in \{S\} \Rightarrow X = Y = S \Rightarrow X \cap Y = S \in \mathcal{F}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\quad X \cap Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \cap Y = S \underset{X, Y \subseteq S}{\Rightarrow} X = Y = S \Rightarrow X, Y \in \mathcal{F}$

- Нека је S бесконачан скуп. Тада је

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(S) : \overbrace{S \setminus X}^{X^c} \text{ је } \underline{\text{коначан}}\}$$

филтер на S.

F1) $S \in \mathcal{F}$? $\quad S \setminus S = S^c = \emptyset$ – коначан ✓

F2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$? $\quad S \setminus \emptyset = \emptyset^c = S$ – бесконачан ✓

F3) $\boxed{\Rightarrow}$ $\quad X, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X^c, Y^c$ – коначни

$X \cap Y \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (X \cap Y)^c$ коначан

F3) $\boxed{\Rightarrow}$ $X, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X^c, Y^c$ – коначни

$X \cap Y \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (X \cap Y)^c$ коначан

$(X \cap Y)^c = \underline{X^c} \cup \underline{Y^c}$ – коначан као унија 2 коначна

$\boxed{\Leftarrow}$ $X, Y \subseteq S$

$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$ – коначан

$$\left.\begin{array}{l} X^c \subseteq X^c \cup Y^c \Rightarrow X^c \text{ коначан} \\ Y^c \subseteq X^c \cup Y^c \Rightarrow Y^c \text{ кон.} \end{array}\right\} \Rightarrow X, Y \in \mathcal{F}$$

Посл: $S = \mathbb{N}$ — фрешеов филтер!