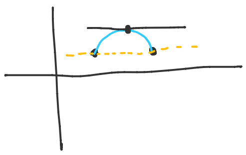
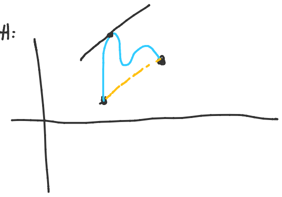
Петак 05.03.2021.

Рол:



Лагранж:



$\boxed{T}$ (Коши) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ непр. на $[a,b]$ и диф. на (a,b) и $g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$.

Тада $\exists c\in(a,b)$ тд.
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$\boxed{T}$ (Лагранж) Следи за $g(x)=x$:

$$g'(x)=1\neq 0, \quad g(b)-g(a)=b-a$$

$$\exists c\in(a,b) \text{ тд. } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

(1) а) $\forall x>y>0$: $\quad \dfrac{1}{1+y}-\dfrac{1}{1+x}\leq x-y$

б) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x-y|$

а) Примењујемо Лагранжа на $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ $\quad$ ($x>0 \Rightarrow f$ је непр и диф.)

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}\cdot 1$$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c), \quad c\in(y,x)$$

$$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y} = (x-y)\cdot f'(c) = (x-y)\cdot\left(-\frac{1}{(1+c)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+y}-\frac{1}{1+x} = \frac{x-y}{\underbrace{(1+c)^2}_{\geq 1}} \leq x-y$$

$c>0 \Rightarrow (1+c)>1 \Rightarrow (1+c)^2>1$

б) $f(x)=\operatorname{arctg} x$

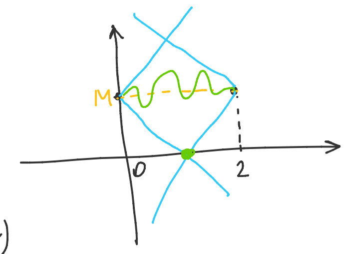
$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$$

$$f(x)-f(y) = f'(c)\cdot(x-y)$$

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| = \underbrace{\frac{1}{1+c^2}}_{\leq 1}\cdot|x-y| \leq |x-y|$$

$1+c^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+c^2} \leq 1$

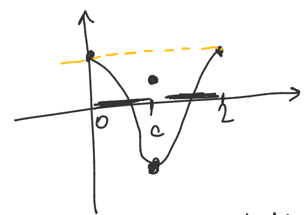
(2) $f \in \underset{\hookrightarrow \text{непр. на } [0,2]}{C[0,2]} \cap \underset{\hookrightarrow \text{диф. на } (0,2)}{\mathcal{D}(0,2)}$, $\quad f(0)=f(2)=M>0$, $\quad |f'(x)| \leq M$, $\forall x \in (0,2)$



Доказати $f(x) \geq 0, \forall x \in [0,2]$.

$[0,2]$ затв. $\Rightarrow \exists c \in [0,2]$, $f(c) = \min\limits_{x\in[0,2]} f(x)$. (Вајерштрас)

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \ c=0 \Rightarrow f(c)=f(0)=M>0 \\ 2^\circ \ c=2 \Rightarrow \quad - - - \quad >0 \end{array}\right\} f(x)>0$$



3° $c \in (0,2)$:

Лагр на $[0,c]$: $\exists c_1 \in (0,c)$

$$f'(c_1) = \frac{f(c)-f(0)}{c-0} = \frac{f(c)-M}{c} \Rightarrow M \geq \frac{f(c)-M}{\underset{>0}{c}} \geq -M \ / \cdot c$$

Лагр на $[c,2]$: $\exists c_2 \in (c,2)$:

$$f'(c_2) = \frac{f(c)-f(2)}{c-2} = \frac{M-f(c)}{\underset{>0}{2-c}} \Rightarrow M \geq \frac{M-f(c)}{2-c} \geq -M$$

$$Mc \geq f(c)-M \geq -Mc \Rightarrow \boxed{M(1-c) \leq f(c)} \leq M(1+c)$$

$$2M-Mc = (2-c)M \geq M-f(c) \geq -(2-c)M = Mc-2M \Rightarrow \boxed{M(c-1) \leq f(c)} \leq M(3-c)$$

$$\Downarrow$$

$$f(c) \geq M \cdot |c-1| \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(c) \geq 0.$$

(3) $f \in C[a,b] \cap \mathcal{D}(a,b)$. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$ и $f'(x) + (f(x))^2 \geq -1$, $\forall x \in (a,b)$

Доказати $b-a \geq \pi$.

$$f(x)^2+1 \geq -f'(x)$$

$$-\frac{f'(x)}{f(x)^2+1} \leq 1$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}(f(x))\right) = \boxed{\frac{f'(x)}{f(x)^2+1}} \geq -1$$

Уочимо фју $F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x=a \\ \operatorname{arctg}(f(x)), & x \in (a,b) \\ -\frac{\pi}{2}, & x=b \end{cases}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}.$$

F је непр. на $[a,b]$, јер: на (a,b) је комп. непр.,

у границама имамо лимесе: $\lim\limits_{x\to a+} F(x) = \lim\limits_{x\to a+} \operatorname{arctg}(f(x))$

$$= \operatorname{arctg}\Big(\overbrace{\lim_{x\to a+} f(x)}^{+\infty}\Big) = \frac{\pi}{2} = F(a).$$

слично, $\lim\limits_{x\to b-} F(x) = -\frac{\pi}{2} = F(b)$.

F је диф на (a,b) као композиција таквих.

Лагранж $\Rightarrow \exists c\in(a,b)$
$$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{b-a} = -\frac{\pi}{b-a}$$

$$\Rightarrow \boxed{-1 \le} \frac{f'(c)}{1+f(c)^2} = -\frac{\pi}{b-a} \Rightarrow -1 \le -\frac{\pi}{b-a} \ /\cdot(-1)$$

$$\frac{\pi}{b-a} \le 1 \Rightarrow \pi \le b-a.$$

(4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диф. тд. f има ограничен 1. извод.

а) Наћи $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2+f(x))$

б) Наћи $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+f(x)}{\sqrt{1+x^4}}$

$$(\exists M>0)(\forall x\in\mathbb{R})\ |f'(x)| \le M.$$

$\Downarrow$ Лагр.

$x>0$: $(\exists c\in\mathbb{R})$ $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$$M\cdot x \ge f'(c)\cdot x = f(x)-f(0) \ge -M\cdot x$$

$|a-b|+|b| \ge |a|$

$\Rightarrow |a-b| \ge |a|-|b|$

$$\Rightarrow f(0)+M\cdot x \ge f(x) \ge f(0)-M\cdot x$$

а) $x^2+f(x) \ge x^2+f(0)-M\cdot x$

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+f(x)) \ge \lim_{x\to\infty}\big(\underbrace{x^2-M\cdot x}_{\to+\infty}+f(0)\big) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(x^2+f(x)) = \infty.$$

б)
$$\frac{x^2+M\cdot x+f(0)}{\sqrt{1+x^4}} \ge \frac{x^2+f(x)}{\sqrt{1+x^4}} \ge \frac{x^2-M\cdot x+f(0)}{\sqrt{1+x^4}} \quad |:x^2$$

$$\frac{1+\cancelto{0}{\frac{M}{x}}+\cancelto{0}{\frac{f(0)}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} \ge \frac{x^2+f(x)}{\sqrt{1+x^4}} \ge \frac{1-\cancelto{0}{\frac{M}{x}}+\cancelto{0}{\frac{f(0)}{x^2}}}{\sqrt{1+\cancelto{0}{\frac{1}{x^4}}}} \quad \Big/\lim_{x\to\infty}$$

$$\frac{\ldots}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}_{\to 0}} \geq \frac{x^2+f(x)}{\sqrt{1+x^4}} \geq \frac{1-\cancel{\frac{\ldots}{x}}+\cancel{\frac{\ldots}{x^2}}}{\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}}} \quad \Big/ \lim_{x\to\infty}$$

$$1 \geq \lim \ldots \geq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+f(x)}{\sqrt{1+x^4}} = 1.$$

(5) $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$. Док. $\exists c \in (a,b)$ $\quad \dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(c) - c\cdot f'(c)$

$b>a>0$

$$\Big\downarrow \; :ab$$

$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$$

$F(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

$G(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\xRightarrow{\text{Коши}} \quad \exists c \in (a,b) \quad \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \Rightarrow \frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{\frac{f'(c)\cdot c - f(c)}{\cancel{c^2}}}{-\frac{1}{\cancel{c^2}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(c) - c\cdot f'(c).$$

$F'(x) = \dfrac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2}$

$G'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

(6) Испитати РН фја:

а) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, на $\mathbb{R}$

б) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, на $[2,+\infty)$

$f \in C[x,y] \cap D(x,y) \xRightarrow{\text{Лаг.}} |f(x)-f(y)| = |f'(c)|\cdot|x-y| \leq |x-y|\cdot M$, $c \in (x,y)$

$(\exists M>0)\ |f'(t)| \leq M,\ t \in (x,y)$

У деф. РН: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x,y \in A)\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

узмемо $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$.

$|x-y| < \dfrac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq M\cdot|x-y| < M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$

$$|x-y| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le M \cdot |x-y| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Пошто f' огр на $A \Rightarrow f$ је РН на A

а) $$f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

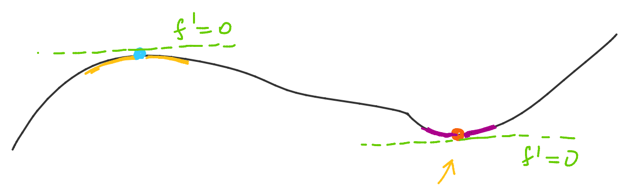
$$|f'(x)| = \frac{1}{1+x^2} \underset{\uparrow \text{ на } \mathbb{R}}{\le} 1 \Rightarrow f \text{ је РН на } \mathbb{R}$$

б) $$|f'(x)| = \left|-\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ x \ge 2}}{\le} \frac{1}{4} \Rightarrow f \text{ је РН на } [2,+\infty)$$

Локални екстремуми

Деф. $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ је локални max (min) ако је $f(a) \ge f(x)$ ($f(a) \le f(x)$) на некој околини U од a.

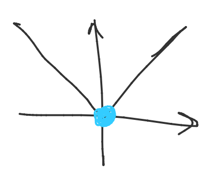
$(\exists \varepsilon > 0)$ $f(a) \ge f(x)$, $\forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.



$\boxed{\text{Т}}$ (Фермаова) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ достиже лок. екстремум (max, min) у $c \in (a,b)$ и f је диф. у $c \Rightarrow f'(c) = 0$.

пр. $f(x) = |x|$

није диф. у 0

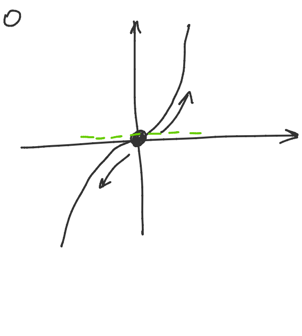


$x = 0$ је лок мин, иако $f'(0) \ne 0$.

нап: Ово је потребан услов, али не и довољан

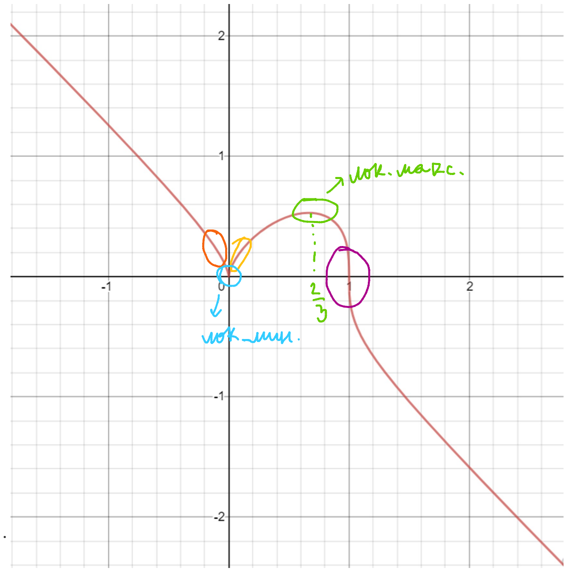
$f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$

0 није тачка лок. екстремума



⑦ Наћи локалне екстремуме од $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}$

$x^2-x^3=0 \iff x=0 \vee x=1$



$\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}$

$f'(x)=\frac{2x}{3}\left(1-\frac{3}{2}x\right)\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$, $x\neq 0,1$

$x=0$: $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ ... $f'_+(0)=+\infty$

$f'_-(0)=-\infty$

$x=1$, $f'(1)=-\infty$.

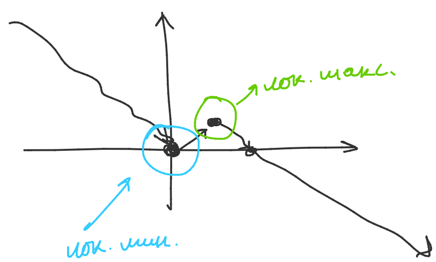
f је непр на $\mathbb{R}$, диф на $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Лагранж: $f'>0 \Rightarrow f$ растућа

$f'<0 \Rightarrow f$ опадајућа $\;\; x>y$: $f(x)-f(y)=\underbrace{f'(c)}_{<0}\cdot(x-y)<0$

Своде се на: $f'>0$ за $(0,\frac{2}{3})$

$f'<0$ за $(-\infty,0)$ и $(\frac{2}{3},1)$ и $(1,+\infty)$



$f\searrow$ на $(-\infty,0)$

$f(0)=0$

$f\nearrow$ на $(0,\frac{2}{3})$

$f(\frac{2}{3})=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

$f\searrow$ на $(\frac{2}{3},1)$

$f(1)=0$

$f\searrow$ на $(1,+\infty)$