Понедељак 02.11.2020.

39. Нека је $f : (A, \le) \to (A', \le')$ изоморфизам структура и нека је $S \subseteq A$. Доказати:

1) $a \in S \Leftrightarrow f(a) \in f(S)$,
2) $a \in S^{\le} \Leftrightarrow f(a) \in f(S)^{\le'}$,
3) Ако постоји $\max S$ тада је $f(\max S) = \max f(S)$,
4) Ако постоји $\sup S$ тада је $f(\sup S) = \sup f(S)$.

Напомена: Кажемо да је пресликавање изоморфизам структура ако је оно морфизам и бијекција.

$x \le y \Rightarrow f(x) \le' f(y)$

f-бијекција

$f(S) \subseteq A'$

1) ✓

2) $\Rightarrow$ ✓

$\boxed{\Leftarrow}$ $f(a) \in f(S)^{\le'} \Leftrightarrow \boxed{(\forall t \in f(S))\, t \le' f(a)}$ (1)

ппс $\neg(a \in S^{\le}) \Leftrightarrow \neg((\forall s \in S)\, s \le a) \Leftrightarrow (\exists s \in S)\, \neg(s \le a) \Leftrightarrow (\exists s \in S)\, \underbrace{a < s}_{a \le s \,\wedge\, a \ne s} \Rightarrow \boxed{(\exists s \in S)\, f(a) <' f(s)}$

$(a \notin S^{\le})$

$\boxed{<' \Leftrightarrow \le' \wedge \ne}$

$(\exists s' \in f(S))\, f(a) <' s'$

$s' = f(s)$

$\Downarrow (1)$

↯

$x < y \Rightarrow f(x) <' f(y)$?

$$\left.\begin{array}{l} x < y \Rightarrow x \le y \Rightarrow f(x) \le' f(y) \\ \text{ако } f(x) = f(y) \underset{1-1}{\Rightarrow} x = y \text{ ↯} \end{array}\right\} f(x) <' f(y)$$

4) $\exists \sup S \Rightarrow \underbrace{f(\sup S)}_{\text{број}} = \sup \underbrace{f(S)}_{\text{скуп}}$

ознака: $M = f(\sup S)$

Знамо $\exists \sup S$:

$\sup S = \min S^{\le} \Leftrightarrow \sup S \in S^{\le} \wedge (S^{\le})^{\ge}$

$\Leftrightarrow$ (1) $\sup S \in S^{\le}$

$\wedge$

(2) $\sup S \in (S^{\le})^{\ge}$

Хоћемо: $M = \min f(S)^{\le'}$

$\Leftrightarrow$

(1) $M \in f(S)^{\le'}$

$\wedge$

(2) $M \in (f(S)^{\le'})^{\ge'}$

$\boxed{(1)}$

(1) $\Rightarrow \sup S \in S^{\le} \underset{2)}{\Rightarrow} f(\sup S) \in f(S)^{\le'}$

$M \in f(S)^{\le'} \Rightarrow$ (1)

$\boxed{(2)}$ Узмимо $u' \in f(S)^{\le'}$ произв.

треба да док: $M \le u'$?

$u' \in A' \underset{\text{на}}{\Rightarrow} (\exists u \in A)\, f(u) = u' \Rightarrow f(u) \in f(S)^{\le'} \underset{2)}{\Rightarrow} u \in S^{\le}$

(2) $\Rightarrow (\forall w \in S^{\le})\, \sup S \le w \overset{w=u}{\Rightarrow} \sup S \le u$

$(2) \Rightarrow (\forall w \in S^{\perp})\ \underline{\sup S \leq w}$

$w = u$

$\Rightarrow \sup S \leq u$

f: $f(\sup S) \leq f(u) = u'$

$M \leq u'$ ✓

Бројност скупова

Подсећање: X, Y скупови

$X \sim Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists$ бијекција $f : X \to Y$

истобројни

$\sim$ релација еквиваленције

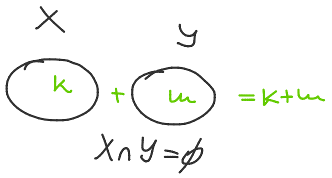
$\{x, y, z\} \sim \{1, 2, 3\}$ — $\boxed{3}$ — $\mathrm{Card}\{x, y, z\} = 3.$

$N_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\} \subseteq \mathbb{N}$

Деф. Скуп A је коначан ако и само ако је истобројан скупу N_k за неко $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ (дакле празан или има коначно много ел.). За коначне скупове пишемо $\mathrm{Card}\, N_k = \boxed{k}$ или $\mathrm{Card}\, \phi = 0$, $\mathrm{Card}\{a\} = 1, \ldots$

ознак

41. Показати да је дисјунктна унија два коначна скупа коначан скуп.



X, Y коначни $\Rightarrow$ $X \sqcup Y$ коначан?

$X \cap Y = \phi$

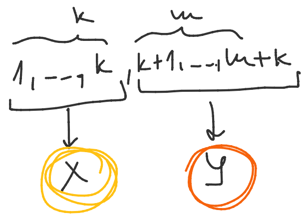
$X \sim N_k$, $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

$Y \sim N_m$

идеја доказа: $X \sqcup Y \overset{f?}{\sim} N_{k+m}$?

$\exists g : N_k \to X$ бij.

$\exists h : N_m \to Y$ бij.



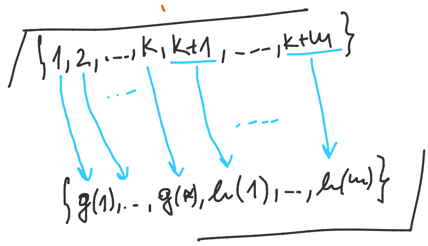
$X = \{g(1), g(2), \ldots, g(k)\}$, $Y = \{h(1), \ldots, h(m)\}$

$X \sqcup Y = \{g(1), \ldots, g(k), h(1), \ldots, h(m)\}$

$k+1 \mapsto 1$

$k+2 \mapsto 2$

правимо: $f : N_{k+m} \to X \sqcup Y$



$$f(n) = \begin{cases} g(n), & 1 \leq n \leq k \\ h(n-k), & k+1 \leq n \leq k+m \end{cases}$$

f бијекција? на ✓ $g(n)$ пролази X

$h(n-k)$ пролази Y

1–1 ✓ $g(n_1) = g(n_2) \overset{g\,б.}{\Rightarrow} n_1 = n_2$

$h(n_1 - k) = h(n_2 - k) \overset{h\,б.}{\Rightarrow} n_1 - k = n_2 - k \Rightarrow n_1 = n_2$

$\underset{X}{g(n_1)} = \underset{Y}{h(n_2 - k)}$ ↯ (јер $X \cap Y = \phi$) ✓

42. Показати да је подскуп коначног скупа коначан скуп.

X-коначан $\Rightarrow X \sim N_k, \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$Y \subseteq X \overset{?}{\Rightarrow} Y$ коначан? $\sim N_?$

Доказујемо математичком индукцијом по k:

БАЗА: $k=0$ $\quad X \sim N_0 = \emptyset \Rightarrow X = \emptyset$

$Y \subseteq \emptyset \Rightarrow Y = \emptyset \Rightarrow Y \sim N_0 \Rightarrow Y$ коначан

ХИПОТЕЗА: претп. да важи за неко k

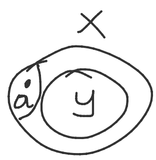
КОРАК: доказујемо за $k+1$ $\quad (k \Rightarrow k+1)$

$0 \overset{+1}{\Downarrow} 1 \overset{+1}{\Downarrow} 2 \overset{+1}{\Downarrow} 3 \overset{+1}{\Downarrow} 4 \; \vdots$

Све природне бројеве!

$\left.\begin{array}{l} X \sim N_{k+1} \\ Y \subseteq X \end{array}\right\}$ $\quad 1^\circ \; Y = X \Rightarrow Y \sim N_{k+1}$

$\Rightarrow$ коначан Y ✓



$2^\circ \; Y \subsetneq X \Rightarrow \exists a \in X \setminus Y$

$\Rightarrow Y \subseteq X \setminus \{a\}$ → доказати: $\underbrace{X}_{\sim N_{k+1}} \setminus \{a\} \sim N_k$

$X \setminus \{a\} \sim N_k$

$\Downarrow$ хип.

Y коначан ✓

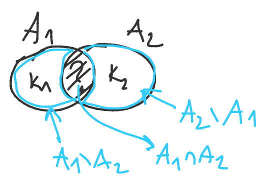
43. Показати да је коначна унија коначних скупова коначан скуп.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ – коначни $\overset{?}{\Rightarrow} A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ коначан!

$A_1 \sim N_{k_1}, \ldots, A_n \sim N_{k_n}$

$k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Индукцијом по n.



БАЗА: $n=1$ $\quad \wedge \quad n=2$

$\bigcup_{\{1\}} A_1 = A_1$ ✓

$A_1 \sim N_{k_1}$

$A_2 \sim N_{k_2}$

$A_1 \cup A_2 \sim N_?$

$A_1 \cup A_2 = \underbrace{(A_1 \setminus A_2)} \sqcup \underbrace{(A_1 \cap A_2) \sqcup (A_2 \setminus A_1)}$

$$\left.\begin{aligned} A_1\setminus A_2 &\subseteq A_1 \\ A_1\cap A_2 &\subseteq A_1, A_2 \\ A_2\setminus A_1 &\subseteq A_2 \end{aligned}\right\} \overset{(42)}{\Longrightarrow} A_1\setminus A_2,\ A_1\cap A_2,\ A_2\setminus A_1 \text{ – коначни}$$

$(41) \Rightarrow (A_1\cap A_2) \sqcup (A_2\setminus A_1) \rightarrow$ коначан

$(41) \Rightarrow (A_1\setminus A_2) \sqcup \big((A_1\cap A_2) \sqcup (A_2\setminus A_1)\big) \rightarrow$ коначан

$\quad\quad \| $

$\quad A_1\cup A_2$ ✓

ХИПОТЕЗА: Нека важи за неко $n \geq 2$. → унија n коначних скупова коначан скуп!

КОРАК: Докажимо за $n+1$?

$\rightarrow \underbrace{A_1\cup A_2 \cup \dots \cup A_{n+1}}_{\text{коначни}} = \boxed{(A_1\cup \dots \cup A_n)} \cup \boxed{A_{n+1}}$

$\Downarrow$ хип.

коначан

коначна

БАЗА ⟹ коначан

Овим је доказ индукцијом завршен!

44. Нека је $(A, \leq)$ тотално уређен скуп и $K \subset A$ његов коначан непразан подскуп. Индукцијом по $\mathrm{Card}(K)$ показати да K има максимум и минимум и да се чланови скупа K могу поређати у строго растући (коначан) низ.

$K = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $\exists \pi$-пермутација скупа $\underbrace{\{1, \dots, m\}}_{N_m}$ [$\pi : N_m \to N_m$ бијекција]

доказујемо $\rightarrow a_{\pi(1)} < a_{\pi(2)} < \dots < a_{\pi(m)}$ ← максимум

минимум

$(a_3 < a_{17} < a_1 < \dots < a_2)$

$a_{\pi(1)}$ је $<$ од свих осталих

$a_{\pi(m)}$ је $>$ –||–

Индукцијом по $\mathrm{Card}(K) = k$.

БАЗА: $k=0 \Rightarrow K=\emptyset$ ↯

$k=1 \Rightarrow K \sim N_1 = \{1\}$, $K = \{f(1)\}$ $\quad$ $f(1)$ сам у низу

$\quad\quad\quad f$

$k=2 \Rightarrow K \sim N_2$, $K = \{x, y\}$ $\quad$ тот. ур. ⟹ $x \leq y \vee x \geq y$

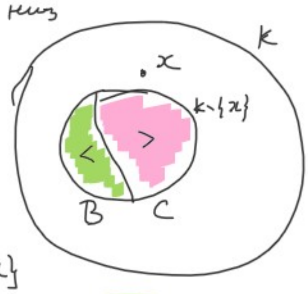
$x \neq y \rightarrow x < y \vee y < x \rightarrow$ то је низ.

ХИПОТЕЗА: важи за све $h \leq k$ → елементи скупа $\sim N_h$ $(h \leq k)$ се могу поређати

поређати низ

ХИПОТЕЗА: важи за све $n \le k$ → елементи скупа $\sim N_n$ $(n \le k)$ се могу поређати у растући низ

КОРАК: да ли важи за $k+1$?

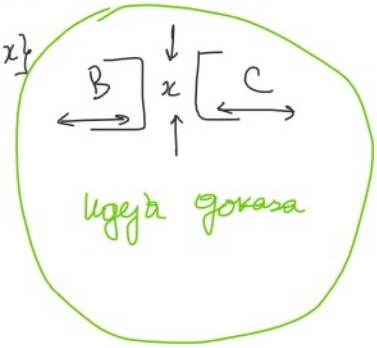


$K \sim N_{k+1}$, $x \in K$ неки ел.

$K \setminus \{x\}$, $K \setminus \{x\} \sim N_k$

$\{t \in K\setminus\{x\} \mid \underline{t < x}\} = B \subseteq K\setminus\{x\}$

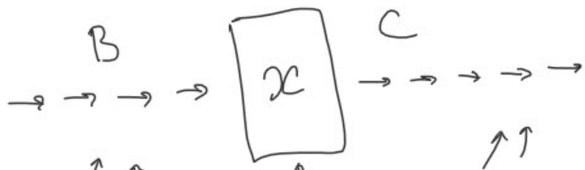
$\{t \in K\setminus\{x\} \mid \underline{t > x}\} = C \subseteq K\setminus\{x\}$



B, C коначни и $\mathrm{Card}(B), \mathrm{Card}(C) \le k = \mathrm{Card}(K\setminus\{x\})$

$B \sqcup C = K\setminus\{x\}$ (А је потп. уређ.)
$t \ne x$

По хипотези: B, C > поређамо у (строго) растући низ!



ставимо x између

(ако је неки од B, C празан → ставимо на крај)

Да ли наш нови поредак ради?

y, z? 1° , → оба у „B делу" ✓

2° −||− C ✓

3° (БУО) $y = x$, 3.1° $z \in B$ делу $z < x$ (по деф B)

3.2° $z \in C$ делу $z > x$ (по деф C)

4° (БУО) $y \in B$, $z \in C$

да ли је $y < z$?

$y < x$ (деф B)

$x < z$ (деф C)

$\Downarrow$ (T)

$y < x < z \Rightarrow y < z$ ✓

45. Показати да је скуп позитивних парних бројева истобројан скупу природних бројева. Показати да је скуп позитивних непарних бројева истобројан скупу природних бројева. Показати да је скуп целих бројева истобројан скупу природних бројева.

1) $\{2,4,6,8,\dots\} = 2\cdot\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ ($=P$)

2) $\{1,3,5,7,\dots\} = 2\cdot\mathbb{N}-1 \sim \mathbb{N}$ ($=N$)

3) $\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

$P \subsetneq \mathbb{N}$
$N \subsetneq \mathbb{N}$
$P \sqcup N = \mathbb{N}$
$\Big\} P \sim N \sim \mathbb{N}$

1) Треба нам бијекција: $f:\mathbb{N}\to P$, $f(n)=2n \in P$

$\{1,2,3,4,\dots\}$
$\downarrow f$
$\{2,4,6,8,\dots\}$

f бијекција? 1-1: $f(n_1)=f(n_2)$
$2n_1 = 2n_2 \;/ :2$
$n_1 = n_2$ ✓

НА: $p\in P\ (\exists n\in\mathbb{N})\ f(n)=p$?

узмемо $n=\frac{p}{2}$, $f(n)=2n = 2\cdot\frac{p}{2}=p$ ✓

$2|p \Rightarrow n=\frac{p}{2}\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow P\sim\mathbb{N}$

2) домаћи! [ХИНТ: $f:\mathbb{N}\to N$, $f(n)=2n-1$]

3) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$

$\{\dots -3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ ← идеја доказа!

$\{1,2,3,4,5,6,7,8,\dots\}$
$\{0,1,-1,2,-2,3,-3,4,\dots\}$

$1,3,5,7,\dots \to 0,-1,-2,-3,\dots$

$2,4,6,8,\dots \to 1,2,3,4,\dots$

$$f(n)=\begin{cases}\frac{1-n}{2}, & n\in N \leftarrow \text{непарни}\\ \frac{n}{2}, & n\in P \leftarrow \text{парни}\end{cases}$$

$-\frac{n-1}{2}=\frac{1-n}{2}$

f бијекција? 1-1: $f(n_1)=f(n_2) \overset{?}{\Rightarrow} n_1=n_2$

1° $n_1,n_2\in N$
$\frac{1-n_1}{2}=\frac{1-n_2}{2} \Rightarrow n_1=n_2$

2° $n_1,n_2\in P$
$\frac{n_1}{2}=\frac{n_2}{2} \Rightarrow n_1=n_2$

3° (БУО) $n_1\in N$, $n_2\in P$
$\frac{1-n_1}{2}=\frac{n_2}{2} \;/\cdot 2$
$1-n_1=n_2$
$n_1+n_2=1$ ↯
$(n_1,n_2\in\mathbb{N})$

#a: $(\forall z\in\mathbb{Z})\ ?\exists n\in\mathbb{N}\quad f(n)=z$

$1^\circ\ z>0 \quad , n=2z$

$2^\circ\ z\le 0 \quad , \frac{1-n}{2}=z \Rightarrow n=1-2z$

$f(n)=\frac{1-n}{2}=\frac{1-(1-2z)}{2}=z\ \checkmark$

$\Rightarrow f$ surjekcija $\Rightarrow \mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$