ЗАДАЦИ ИЗ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА Б – В, Л и Н смер

Шести двочас

асистенти: Марија Микић и Душан Дробњак

1. Свођењем матрице A на Жорданову нормалну форму решити систем диференцијалних једначина $Y' = AY$, ако је $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Скица решења.

1. корак. Тражимо сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.

Сопствене вредности матрице A су $\lambda_{1,2} = \pm i$ (међусобно конјуговане) и оне су вишеструкости (алгебарска вишеструкост) $k = 2$. Сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda_1 = i$ је $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Како овој сопственој вредности можемо придружити само један сопствени вектор, геометријска вишеструкост је 1, тј. $m = 1$. Стога ћемо имати један Жорданов блок, тј. $J = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$, где су $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и 0 представља матрицу димензија 2×2.

2. корак. Тражимо други комплексни базни вектор тј. уопштени сопствени вектор.

Решавањем система $(A - \lambda_1 E)\gamma_2 = \gamma_1$, добија се да је $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1-i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Стога је матрица $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. корак. Рачунамо e^{xJ}.

Матрицу J можемо записати у облику $J = D + N$, где је $D = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$ и $N = \begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Матрица N је нилпотентна матрица и $N^2 = [0]_{4\times4}$. Познато је (са часова вежби) да је $R(x) = e^{xA_1} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$. Приметимо да D и N комутирају, одакле следи да је

$$e^{xJ} = e^{x(D+N)} = e^{xD} \cdot e^{xN} = \begin{bmatrix} e^{xA_1} & 0 \\ 0 & e^{xA_1} \end{bmatrix} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} N^n = \begin{bmatrix} R(x) & 0 \\ 0 & R(x) \end{bmatrix} \cdot \sum_{n=0}^{1} \frac{x^n}{n!} N^n = \begin{bmatrix} R(x) & 0 \\ 0 & R(x) \end{bmatrix} (E + xN).$$

Тако да важи $e^{xJ} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x & x\cos x & x\sin x \\ -\sin x & \cos x & -x\sin x & x\cos x \\ 0 & 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & 0 & -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$.

4. корак. Рачунамо e^{xA} и одређујемо опште решење система диференцијалних једначина.

Како је $T^{-1}AT = J$, а показано је (на часовима вежби) да је онда $A^n = TJ^nT^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, следи да је

$$e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} TJ^nT^{-1} = Te^{xJ}T^{-1}.$$

Како је матрица e^{xA} фундаментална матрица система, следи да је опште решење полазног система диференцијалних једначина $Y(x) = e^{xA} \cdot C = Te^{xJ}T^{-1}C = Te^{xJ}C_1$, где је $C_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$.

2. Свођењем матрице A на Жорданову нормалну форму решити систем диференцијалних једначина $Y' = AY$, ако је $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Скица решења.

1. корак. Тражимо сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.

Сопствене вредности матрице A су $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ и $\lambda_{3,4} = 1 \pm i$. Сопствена вредност $\lambda_1 = 2$ је вишеструкости (алгебарска вишеструкост) $k = 2$. Сопствени вектор који одговара овој сопственој вредности је $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Како овој сопственој вредности можемо придружити само један сопствени вектор, геометријска вишеструкост је 1, тј. $m = 1$. Стога ћемо имати један Жорданов блок за ову сопствену вредност. Сопствена вредност $\lambda_3 = 1 + i$ није вишеструка, тако да је довољно да нађемо један њен сопствени вектор. Рачуном добијамо $\gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1+i \\ -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

2. корак. Тражимо још један базни вектор тј. уопштени сопствени вектор за сопстену вредност $\lambda_1 = 2$.

Решавањем система $(A - \lambda_1 E)\gamma_2 = \gamma_1$, добија се да је $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Стога је матрица $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

3. корак. Рачунамо e^{xJ}.

Матрицу J можемо записати у облику $J = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, где су $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ и 0 представља матрицу димензија 2×2. На основу задатка са претходног часа знамо да је $e^{xA_1} = e^{2x} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, а познато је (са часова вежби) да је $e^{xA_2} = e^x \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$. Како је $e^{xJ} = \begin{bmatrix} e^{xA_1} & 0 \\ 0 & e^{xA_2} \end{bmatrix}$, следи да је

$$e^{xJ} = e^x \begin{bmatrix} e^x & xe^x & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & 0 & -\sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$

4. корак. Рачунамо e^{xA} и одређујемо опште решење система диференцијалних једначина.

Како је $T^{-1}AT = J$, а показано је (на часовима вежби) да је онда $A^n = TJ^nT^{-1}$, $n \in N$, следи да је

$$e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} TJ^nT^{-1} = Te^{xJ}T^{-1}.$$

Како је матрица e^{xA} фундаментална матрица система, следи да је опште решење полазног система диференцијалних једначина $Y(x) = e^{xA} \cdot C = Te^{xJ}T^{-1}C = Te^{xJ}C_1$, где је $C_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$.

3. Нека је $A \in M_{2020}(\mathbb{R})$ и $B = e^A$ за $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -2020 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(а) Ако је $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{2020}$, доказати да је $b_{ij} \geqslant 0$, $\forall j \neq 2020$.

(б) Доказати да су све сопствене вредности матрице B позитивне.

Скица решења.

(а) Искористићемо идеју као у сличном задатку са вежби. Нека је $N \in M_{2020}(\mathbb{R})$ матрица са елементима n_{ij} за коју важи

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) = (1, 2020), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Означимо $C = 2020(E+N)$. Јасно је да матрица $A+C$ има ненегативне елементе, одакле следи да је таква и e^{A+C}. Пошто матрице A и C комутирају, важи $B = e^A = e^{A+C-C} = e^{A+C} \cdot e^{-C}$. Приметимо да E и N комутирају и да је N нилпотентна реда 2. Матрицу e^{-E_1} можемо израчунати као

$$e^{-E_1} = e^{-2020(E+N)} = e^{-2020E} \cdot e^{-2020N} = e^{-2020} \cdot (E - 2020N).$$

Стога је $B = e^{A+E_1} \cdot e^{-2020} \cdot (E - 2020N) = e^{-2020} \cdot e^{A+E_1} - 2020e^{-2020} \cdot e^{A+E_1} \cdot N$. Прва од две матрице у овој разлици има све позитивне елементе, а друга има све позитивне осим можда у последњој колони, што је и требало доказати.

(б) Познато нам је са вежби да ако је $\lambda \in \mathbb{C}$ сопствена вредност матрице A, онда је e^λ сопствена вредност матрице B. Пошто је A горње-троугаона матрица, можемо видети да је $\det(A - \lambda E) = (-1-\lambda)^{2020}$. Одатле следеи да је $\lambda = -1$ једина сопствена вредност матрице A и вишеструкости је 2020. Међутим, из тврђења са почетка не знамо одмах да је e^{-1} једина сопствена вредност од B вишеструкости 2020, јер то тврђење не говори ништа о поновљеним сопственим вредностима. Са друге стране, можемо да приметимо да су сви степени матрице A такође горње-троугаоне матрице. Приметимо још да ће на главној дијагонали матрице A^n бити бројеви $(-1)^n$, за $n \in \mathbb{N}$. Одатле следи и да је матрица B горње-троугаона и да су јој на главној дијагонали бројеви e^{-1}. Одатле заиста имамо да је e^{-1} једина сопствена вредност матрице B и то вишеструкости 2020, одакле следи тврђење задатка.

4. Нека је $A \in M_2(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $e^{xA} = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ -3x^x + 3e^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix}$. Нека је дат систем диференцијалних једначина $Y' = B^{-1}ABY + D(x)$.

(а) Одредити матрицу e^{xB} у облику реда.

(б) Одредити једну фундаменталну матрицу одговарајућег хомогеног система диференцијалних једначина.

(в) Одредити матрицу $B^{-1}AB$.

(г) Решити дати систем диференцијалних једначина, ако је $D(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^x \end{bmatrix}$.

Скица решења.

(а) Можемо рачунати првих неколико чланова низа B^n, за $n \in \mathbb{N}$. Видимо да је $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, итд. Докажимо индукцијом да ће бити $B^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Базу имамо, а претпоставимо да ово важи за B^n. Онда можемо рачунати $B^{n+1} = B^n \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2n+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, што нам је и требало. Сада рачунамо експонент у облику реда као

$$e^{xB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n B^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & 2x \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & 2xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix}.$$

(б) Знамо да је једна фундаментална матрица $\Phi(x) = e^{xB^{-1}AB} = B^{-1}e^{xA}B$. Како је $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, важиће $\Phi(x) = \begin{bmatrix} 7e^x - 6e^{2x} & 14e^x - 14e^{2x} \\ -3e^x + 3e^{2x} & -6e^x + 7e^{2x} \end{bmatrix}$.

(в) Означимо $S = B^{-1}AB$.
Први начин: Из појављивања e^x и e^{2x} у матрици $\Phi(x)$, закључујемо да је S слична дијагоналној матрици са сопственим вредностима 1 и 2, тј. $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Нека је $S = TJT^{-1}$, за $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Узмимо да је $\det T = 1$ и онда је $T^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Тада је

$$\Phi(x) = e^{xS} = Te^{xJ}T^{-1} = T \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} ade^x - bce^{2x} & ab(e^{2x} - e^x) \\ cd(e^x - e^{2x}) & ade^{2x} - bce^x \end{bmatrix}.$$

Одатле закључујемо да је $ad = 7$, $bc = 6$, $ab = -14$, $cd = -3$. Можемо узети $a = 7$, а одатле је даље $d = 1$, $b = -2$, $c = -3$. Сада матрицу S коначно рачунамо као $S = TJT^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -14 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.
Други начин: Познато нам је да за фундаменталну матрицу важи да задовољава дати хомогени систем $\Phi'(x) = S\Phi(x)$. Одатле, уз мало рачуна добијамо решење.

(г) Први начин: Како смо већ нашли фундаменталну матрицу хомогеног система, остаје нам само да нађемо неко партикуларно решење нехомогеног система. Поделимо $D(x) = D_1(x) + D_2(x)$, где је $D_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $D_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \end{bmatrix}$. Партикуларно решење за нехомогени део $D_1(x)$ тражимо у облику константног решења $Y_1(x) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Закључујемо да је $Y_1(x) = \begin{bmatrix} -4 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$. Партикуларно решење за нехомогени део $D_2(x)$ тражимо у облику $Y_2(x) = \begin{bmatrix} a_1x + b_1 \\ a_2x + b_2 \end{bmatrix} e^x$. Закључујемо да је $Y_2(x) = \begin{bmatrix} 14x + 14 \\ -6x - 7 \end{bmatrix} e^x$. Коначно је опште решење $Y(x) = \Phi(x)C + Y_1(x) + Y_2(x)$, где је $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$.
Други начин: Можемо се послужити и методом варијације константе. Опште решење добијамо из формуле $Y(x) = \Phi(x) \cdot \left(C + \int \Phi^{-1}(x)D(x)\mathrm{d}x\right)$.

5. Нека је дат систем диференцијалних једначина

$$x^2yy' = \frac{y^2}{2} + e^{2z}$$

$$2x^2z' = -3\frac{y^2}{e^{2z}} - 4.$$

(а) Свести дати систем на систем облика $Y' = AY$, где је $A \in M_2(\mathbb{R})$.

(б) Израчунати $\det\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(E+\frac{A}{n}\right)^n\right)$, ако је A матрица из дела (а).

(в) Решити систем диференцијалних једначина $Y' = AY$, ако је A матрица из дела (а).

Скица решења.

(а) Прву једначину помножимо са 2, а другу са e^{2z}. Пошто се у једначинама појављују изрази y^2, $2yy'$, e^{2z}, $2e^{2z}z'$, то нас наводи да уведемо нове непознате функције $u = y^2$ и $v = e^{2z}$. За њих имамо $u' = 2yy'$ и $v' = 2e^{2z}z'$. Сада се систем своди на

$$x^2u' = u + 2v$$
$$x^2v' = -3u - 4v.$$

Са вежби знамо да за овакве системе треба да уведемо смену независне променљиве. Нову променљиву t тражимо тако да важи $t'_x = \frac{1}{x^2}$. Видимо да можемо узети $t = -\frac{1}{x}$. Коначно се систем своди на

$$u'_t = u + 2v$$
$$v'_t = -3u - 4v.$$

Ово јесте систем облика $Y' = AY$, где је $Y(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ и $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$.

(б) Користећи особине експонента матрице, имамо

$$\det\left(\lim_{n\to\infty}\left(E+\frac{A}{n}\right)^n\right) = \det(e^A) = e^{\mathrm{tr}A} = e^{-3}.$$

(в) Сопствене вредности матрице A су $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -2$. Одговарајући сопствени вектори су $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ и $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Означимо са $J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ и $T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Опште решење система $Y' = AY$ је онда $Y(t) = e^{tA}C = e^{tTJT^{-1}}C = Te^{tJ}T^{-1}C = Te^{tJ}C_1$, где је $e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$ и $C_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$.