ЗАДАЦИ ИЗ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА Б – В, Л и Н смер

Пети двочас

асистенти: Марија Микић и Душан Дробњак

1. Свођењем матрице A на Жорданову нормалну форму решити систем диференцијалних једначина $Y' = AY$, ако је $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Скица решења.

1. корак. Тражимо сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.

Сопствена вредност матрице A је $\lambda = 2$ и она је вишеструкости (алгебарска вишеструкост) $k = 2$. Сопствени вектор који одговара овој сопственој вредности је $\gamma_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Како овој сопственој вредности можемо придружити само један сопствени вектор, геометријска вишеструкост је 1, тј. $m = 1$. Стога ћемо имати један Жорданов блок, тј. $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Закључујемо да матрица A није дијагонализабилна.

2. корак. Тражимо други базни вектор тј. уопштени сопствени вектор.

Решавањем система $(A - \lambda E)\gamma_2 = \gamma_1$, добија се да је $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Стога је матрица $T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. корак. Рачунамо e^{xJ}.

Матрицу J можемо записати у облику $J = 2E + N$, где је $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Матрица N је нилпотентна матрица и $N^2 = [0]_{2\times 2}$. Како E комутира са сваком матрицом, следи да је

$$e^{xJ} = e^{x(2E+N)} = e^{2xE} \cdot e^{xN} = e^{2x}E \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} N^n = e^{2x} \cdot \sum_{n=0}^{1} \frac{x^n}{n!} N^n = e^{2x}(E + xN) = e^{2x} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. корак. Рачунамо e^{xA} и одређујемо опште решење система диференцијалних једначина.

Како је $T^{-1}AT = J$, а показано је (на часовима вежби) да је онда $A^n = TJ^nT^{-1}$, $n \in N$, следи да је

$$e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} TJ^nT^{-1} = Te^{xJ}T^{-1}.$$

Како је матрица e^{xA} фундаментална матрица система, следи да је опште решење полазног система диференцијалних једначина $Y(x) = e^{xA} \cdot C = Te^{xJ}T^{-1}C = Te^{xJ}C_1$, где је $C_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$.

2. Свођењем матрице A на Жорданову нормалну форму решити систем диференцијалних једначина $Y' = AY$, ако је $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Скица решења.

1. корак. Тражимо сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.

Сопствена вредност матрице A је $\lambda = 2$ и она је вишеструкости (алгебарска вишеструкост) $k = 4$. Сопствени вектори (који су линеарно независни) који одговарају овој сопственој вредности су $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Како овој сопственој вредности можемо придружити само два линеарно независна сопствена вектора, геометријска вишеструкост је 2, тј. $m = 2$. Стога ћемо имати два Жорданова блока.

2. корак. Одређујемо минимални полином.

Како $A - 2E \neq [0]_{4\times 4}$, а $(A-2E)^2 = [0]_{4\times 4}$, закључујемо да је $\mu_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, па је $st\mu_A(\lambda) = 2$. Стога је ред највећег Жордановог блока 2, тј. блок је 2×2, па је $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3. корак. Тражимо још два базна вектора тј. уопштене сопствене векторе.

Решавањем система $(A - \lambda E)\gamma_2 = \gamma_1$, добија се да је $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Решавањем система $(A - \lambda E)\gamma_4 = \gamma_3$, добија се да је $\gamma_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Стога је матрица $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. корак. Рачунамо e^{xJ}.

Матрицу J можемо записати у облику $J = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, а 0 у матрици су нула матрице домена 2×2 и $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. На основу претходног задатка знамо да је $e^{xA_2} = e^{2x}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, а како је $e^{xJ} = \begin{bmatrix} e^{xA_2} & 0 \\ 0 & e^{xA_2} \end{bmatrix}$, следи да је

$$e^{xJ} = e^{2x}\begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. корак. Рачунамо e^{xA} и одређујемо опште решење система диференцијалних једначина.

Како је $T^{-1}AT = J$, а показано је (на часовима вежби) да је онда $A^n = TJ^nT^{-1}$, $n \in N$, следи да је

$$e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}TJ^nT^{-1} = Te^{xJ}T^{-1}.$$

Како је матрица e^{xA} фундаментална матрица система, следи да је опште решење полазног система диференцијалних једначина $Y(x) = e^{xA} \cdot C = Te^{xJ}T^{-1}C = Te^{xJ}C_1$, где је $C_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$.

3. Свођењем матрице A на Жорданову нормалну форму решити систем диференцијалних једначина $Y' = AY$, ако је $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Скица решења.

1. корак. Тражимо сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.

Сопствена вредност матрице A је $\lambda = 2$ и она је вишеструкости (алгебарска вишеструкост) $k = 4$. Линеарно независни сопствени вектори који одговарају овој сопственој вредности су $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Како овој сопственој вредности можемо придружити само два линеарно независна сопствена вектора, геометријска вишеструкост је 2, тј. $m = 2$. Стога ћемо имати два Жорданова блока.

2. корак. Одређујемо минимални полином.

Како $A - 2E \neq [0]_{4\times4}$ и $(A-2E)^2 \neq [0]_{4\times4}$, а $(A-2E)^3 = [0]_{4\times4}$, закључујемо да је $\mu_A(\lambda) = (\lambda-2)^3$, па је $st\mu_A(\lambda) = 3$. Стога је ред највећег Жордановог блока 3, тј. он је домена 3×3, па је $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3. корак. Тражимо још два базна вектора тј. уопштене сопствене векторе.

Решавањем система $(A - \lambda E)\gamma_2 = \gamma_1$, добија се да је $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Решавањем система $(A - \lambda E)\gamma_3 = \gamma_2$, добија се да је $\gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Стога је матрица $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. корак. Рачунамо e^{xJ}.

Матрицу J можемо записати у облику $J = \begin{bmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$, а 0 у матрици су нула матрице одговарајућег домена, а $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ и $A_1 = [2]$. Како је $e^{xJ} = \begin{bmatrix} e^{xA_3} & 0 \\ 0 & e^{xA_1} \end{bmatrix}$, а $e^{xA_1} = [e^{2x}]$, остаје да одредимо само e^{xA_3}. Матрицу A_3 можемо записати у облику $J = 2E + N$, где је $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Матрица N је нилпотентна матрица и $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, а $N^3 = [0]_{3\times3}$. Како E комутира са сваком матрицом, следи да је

$$e^{xA_3} = e^{x(2E+N)} = e^{2xE} \cdot e^{xN} = e^{2x}E \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} N^n = e^{2x} \cdot \sum_{n=0}^{2} \frac{x^n}{n!} N^n = e^{2x}(E + xN + \frac{x^2}{2!}N^2) = e^{2x} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Стога је

$$e^{xJ} = e^{2x} \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. корак. Рачунамо e^{xA} и одређујемо опште решење система диференцијалних једначина.

Како је $T^{-1}AT = J$, а показано је (на часовима вежби) да је онда $A^n = TJ^nT^{-1}$, $n \in N$, следи да је

$$e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} TJ^nT^{-1} = Te^{xJ}T^{-1}.$$

Како је матрица e^{xA} фундаментална матрица система, следи да је опште решење полазног система диференцијалних једначина $Y(x) = e^{xA} \cdot C = Te^{xJ}T^{-1}C = Te^{xJ}C_1$, где је $C_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$.

4. Свођењем матрице A на Жорданову нормалну форму решити систем диференцијалних једначина $Y' = AY$, ако је $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Скица решења.

1. корак. Тражимо сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.

Сопствена вредност матрице A је $\lambda = 2$ и она је вишеструкости (алгебарска вишеструкост) $k = 3$. Сопствени вектор који одговарајa овој сопственој вредности је $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Како овој сопственој вредности можемо придружити само један сопствени вектор, геометријска вишеструкост је 1, тј. $m = 1$. Стога ћемо имати само један Жорданов блок, па је $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2. корак. Тражимо још два базна вектора тј. уопштене сопствене векторе.

Решавањем система $(A - \lambda E)\gamma_2 = \gamma_1$, добија се да је $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Решавањем система $(A - \lambda E)\gamma_3 = \gamma_2$, добија се да је $\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Стога је матрица $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. корак. Рачунамо e^{xA} и одређујемо опште решење система диференцијалних једначина.

Како је матрица $J = A_3$ из претходног задатка, то је $e^{xJ} = e^{2x} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Матрица e^{xA} је облика

$$e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} TJ^nT^{-1} = Te^{xJ}T^{-1}.$$

Како је матрица e^{xA} фундаментална матрица система, следи да је опште решење полазног система диференцијалних једначина $Y(x) = e^{xA} \cdot C = Te^{xJ}T^{-1}C = Te^{xJ}C_1$, где је $C_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$.