ЗАДАЦИ ИЗ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА Б – М смер

Девети двочас

асистент: Душан Дробњак

1. Скицирати фазне портрете динамичких система, а затим испитати стабилност њихових еквилибријума:

а) $\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= \quad\;\; -3x_2 \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + 3x_2 \\ x_2' &= \;\; 5x_1 - 3x_2 \end{aligned}$ в) $\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1. \end{aligned}$

Скица решења.

У сва три случаја је једини еквилибријум тачка $X^* = (0,0)$.

а) Матрица система је $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, а њене сопствене вредности су $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -3$. Следи да је еквилибријум стабилан чвор и фазни портрет је приказан на левој слици испод. Одатле је јасно да је еквилибријум асимптотски стабилан. Опште решење система је

$$X(t) = e^{tA}C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} C = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ 0 & -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} C,\ C \in \mathbb{R}^2,$$

одакле следи да је кретање система ϕ_t неке тачке X_0 дато са

$$\phi_t(X_0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} X_0.$$

Како је $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi_t(X_0) = (0,0) = X^*$, следи да је X^* асимптотски стабилан еквилибријум.

б) Матрица система је $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, а њене сопствене вредности су $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -6$. Следи да је еквилибријум седло и фазни портрет је приказан на средњој слици испод. Одатле је јасно да је еквилибријум нестабилан, јер трајекторије које пролазе близу X^* *беже у бесконачност*. Доказаћемо ово и по дефиницији. Опште решење система је

$$X(t) = e^{tA}C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-6t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}^{-1} C = \begin{bmatrix} 5e^{2t} + 3e^{-6t} & 3e^{2t} - 3e^{-6t} \\ 5e^{2t} - 5e^{-6t} & 3e^{2t} + 5e^{-6t} \end{bmatrix} \frac{C}{8},\ C \in \mathbb{R}^2,$$

одакле следи да је кретање система ϕ_t неке тачке X_0 дато са

$$\phi_t(X_0) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 5e^{2t} + 3e^{-6t} & 3e^{2t} - 3e^{-6t} \\ 5e^{2t} - 5e^{-6t} & 3e^{2t} + 5e^{-6t} \end{bmatrix} X_0.$$

Нека је U_1 произвољна околина од X^* и U_0 околина из дефиниције. Нека је $r > 0$ тако да важи $B(X^*; r) \subset U_0$. Узмимо $X_0 = (r/2, 0) \in B(X^*; r) \subset U_0$. Како је

$$\lim_{t\to+\infty} ||\phi_t(X_0)|| = \lim_{t\to+\infty} \left\| \frac{r}{16}(5e^{2t} + 3e^{-6t}, 5e^{2t} - 5e^{-6t}) \right\| = +\infty,$$

следи да почевши од неког $t > 0$ важи $\phi_t(X_0) \notin U_1$, што крши услов за стабилност. Дакле, еквилибријум је нестабилан.

в) Матрица система је $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, а њене сопствене вредности су $\lambda_{1,2} = \pm i$. Следи да је еквилибријум центар и фазни портрет је приказан на десној слици испод. Одатле је јасно да је еквилибријум стабилан и није асимптотски стабилан. Доказаћемо ово и по дефиницији. Опште решење система је

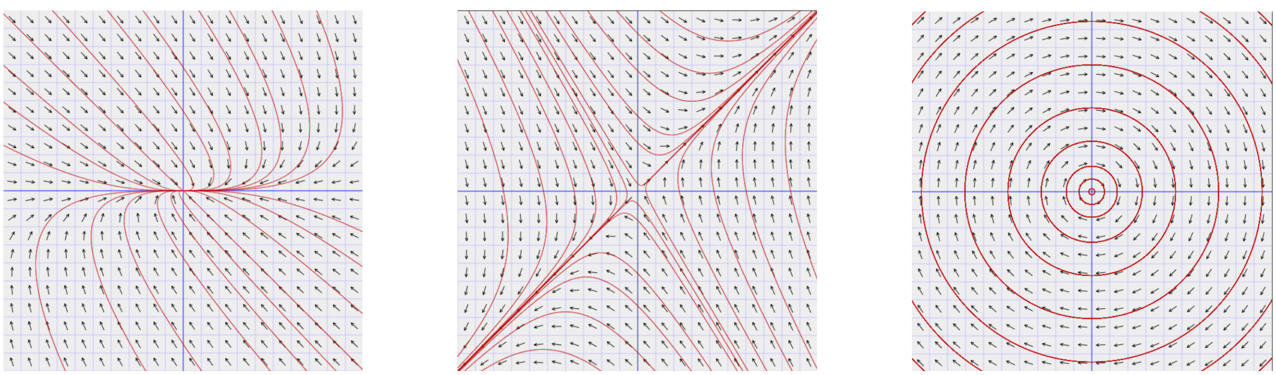
$$X(t) = e^{tA}C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} C = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} C, \ C \in \mathbb{R}^2,$$

одакле следи да је кретање система ϕ_t неке тачке X_0 дато са

$$\phi_t(X_0) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} X_0.$$

Видимо да су трајекторије периодичне и пошто важи $||\phi_t(X_0)|| = ||X_0||$, кретање се врши по кружници са центром у X^*. Нека је U_1 произвољна околина тачке X^*. Уочимо $r > 0$ за које важи $U_0 = B(X^*; r) \subset U_1$. За прозивољно $X_0 \in U_0$ важи да је $\phi_t(X_0) \in U_0 \subset U_1$, па је X^* тачка стабилног еквилибријума. Он није и асимптотски стабилан, јер ако узмемо $X_0 \neq X^*$ из околине U_0, важи

$$\lim_{t \to +\infty} ||\phi_t(X_0)|| = \lim_{t \to +\infty} ||X_0|| = ||X_0|| \neq 0.$$



2. Испитати стабилност еквилибријума из задатка 1 помоћу теореме Љапунова о сопственим вредностима.

Скица решења.

Сваки од ова три система има само један еквилибријум, тачку $X^* = (0, 0, 0)$.

а) Сопствене вредности матрице система су $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -3$. Пошто је

$$\mathrm{Re}(\lambda_1) = -1 < 0 \ \text{ и } \ \mathrm{Re}(\lambda_2) = -3 < 0,$$

следи да је X^* асимптотски стабилан еквилибријум.

б) Сопствене вредности матрице система су $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -6$. Пошто је

$$\mathrm{Re}(\lambda_1) = 2 > 0 \ \text{ и } \ \mathrm{Re}(\lambda_2) = -6 < 0,$$

следи да је X^* нестабилан еквилибријум.

в) Сопствене вредности матрице система су $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$. Пошто је

$$\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0 \ \text{ и } \ \mathrm{Re}(\lambda_2) = 0,$$

следи да не можемо овом методом одредити стабилност еквилибријума X^*.

3. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$\begin{aligned}
x_1' &= e^{x_1} - e^{-3x_3}\\
x_2' &= 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2)\\
x_3' &= \ln(1 - 3x_1 + x_3),
\end{aligned}$$

а затим испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0, 0, 0)$.

Скица решења.

Да бисмо нашли тачке еквилибријума, потребно је да решимо систем једначина

$$\begin{aligned}
e^{x_1} - e^{-3x_3} &= 0\\
4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) &= 0\\
\ln(1 - 3x_1 + x_3) &= 0,
\end{aligned}$$

који се своди на еквивалентан систем

$$\begin{aligned}
x_1 &= -3x_3\\
4x_3 &= 3\sin(x_1 + x_2)\\
0 &= -3x_1 + x_3.
\end{aligned}$$

Из прве и треће једначине налазимо да мора важити $x_1 = x_3 = 0$, док нам друга даје $x_2 = k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$. Дакле, скуп свих еквилибријума је $\{(0, k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и јасно је да је $X^* = (0, 0, 0)$ један од њих.
Ако почетни систем запишемо као $X' = F(X)$, за $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, можемо израчунати

$$\mathrm{d}F(X) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & 3e^{-3x_3}\\ -3\cos(x_1 + x_2) & -3\cos(x_1 + x_2) & 4\\ \frac{-3}{1-3x_1+x_3} & 0 & \frac{1}{1-3x_1+x_3} \end{bmatrix},$$

а онда и

$$L = \mathrm{d}F(X^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3\\ -3 & -3 & 4\\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сопствене вредности матрице L су $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_{2,3} = 1 \pm 3i$. Пошто је $\mathrm{Re}(\lambda_2) = 1 > 0$, следи да је еквилибријум X^* нестабилан.

4. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$\begin{aligned}
x_1' &= (x_3 + 1)(2x_2 - x_1)\\
x_2' &= -(x_3 + 1)(x_1 + x_2)\\
x_3' &= -x_3^3,
\end{aligned}$$

а затим испитати њихову стабилност.

Скица решења.

Да бисмо нашли тачке еквилибријума, потребно је да решимо систем једначина

$$\begin{aligned}
(x_3 + 1)(2x_2 - x_1) &= 0\\
-(x_3 + 1)(x_1 + x_2) &= 0\\
-x_3^3 &= 0,
\end{aligned}$$

који се своди на еквивалентан систем

$$\begin{aligned}
2x_2 - x_1 &= 0\\
x_1 + x_2 &= 0\\
x_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Јединствено решење система је тачка $X^* = (0,0,0)$.
Ако почетни систем запишемо као $X' = F(X)$, за $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, можемо израчунати

$$\mathrm{d}F(X) = \begin{bmatrix} -x_3 - 1 & 2x_3 + 2 & 2x_2 - x_1 \\ -x_3 - 1 & -x_3 - 1 & -x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & -3x_3^2 \end{bmatrix},$$

а онда и

$$L = \mathrm{d}F(X^*) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сопствене вредности матрице L су $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_{2,3} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$. Видимо да не можемо применити методу сопствених вредности.
Потражимо функцију Љапунова у облику $V(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$. Како је $\nabla V(x_1, x_2, x_3) = (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3)$, рачунамо

$$\langle \nabla V(x_1, x_2, x_3), F(x_1, x_2, x_3) \rangle = 2(x_3 + 1)(-ax_1^2 + (2a - b)xy - by^2) - 2cx_3^4. \tag{1}$$

Посматрамо неку околину U од X^*, па можемо сматрати да је $x_3 + 1 > 0$ и одатле је јасно да избор

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 1$$

обезбеђује да је израз (1) негативан на скупу $U \setminus \{X^*\}$. Takoђе, јасно је да важи $V(X^*) = 0$ и $V(X) > 0$, за $X \in U \setminus \{X^*\}$. Одатле следи да је $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$ функција Љапунова за почетни систем и да је еквилибријум X^* асимптотски стабилан.

5. Доказати да је координатни почетак стабилан, али не и асимптотски стабилан еквилибријум система $X' = AX$, где је $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0,0)$ система:

а) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_1x_2^2 \\ -x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ б) $X' = AX + \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 \\ x_2^3 + x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ в) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$

Показати да је у сва три случаја матрица $\mathrm{d}F(\mathbf{0})$ једнака и да метод сопствених вредности не даје одговор.

Скица решења.

Координатни почетак $X^* = (0,0)$ је једини еквилибријум датог система. Сопствене вредности матрице A су $\lambda_{1,2} = \pm i$. Сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda_1 = i$ је $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$, па је опште решење система

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Одавде следи да је кретање тачке X_0 је дато са

$$\phi_t(X_0) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} X_0 = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} X_0.$$

Може се израчунати да је $||\phi_t(X_0)|| = ||X_0||$, даљи закључци су исти као у задатку 1 под в).

Урадимо овај задатак налазећи функцију Љапунова. У сва три примера ћемо се послужити функцијом $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Јасно је да важи $V(X^*) = 0$ и $V(X) > 0$, за $X \neq X^*$. Означавамо као и до сада $X' = F(X)$.

а) Пошто је

$$\langle \nabla V(x_1, x_2), F(x_1, x_2) \rangle = \langle (2x_1, 2x_2), (-x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2, x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2) \rangle = -2x_1^4 - 2x_2^4 - 4x_1^2x_2^2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0,$$

за $(x_1, x_2) \neq X^*$, следи да је X^* тачка асимптотски стабилног еквилибријума.

б) Пошто је

$$\langle \nabla V(x_1,x_2), F(x_1,x_2)\rangle = \langle (2x_1,2x_2), (-x_2+x_1^3+x_1x_2^2, x_1+x_2^3+x_1^2x_2)\rangle = 2x_1^4+2x_2^4+4x_1^2x_2^2 = 2(x_1^2+x_2^2)^2 > 0,$$

за $(x_1,x_2) \neq X^*$, следи да је X^* тачка нестабилног еквилибријума.

в) Пошто је

$$\langle \nabla V(x_1,x_2), F(x_1,x_2)\rangle = \langle (2x_1,2x_2), (-x_2-x_1x_2, x_1+x_1^2)\rangle = -2x_1^2x_2+2x_1^2x_2 = 0,$$

за свако (x_1,x_2), следи да је X^* тачка стабилног, али не и асимптотски стабилног еквилибријума.

У сва три случаја важи $\mathrm{d}F(\mathbf{0}) = A$, чије су сопствене вредности $\pm i$. Пошто је $\mathrm{Re}(\pm i) = 0$, одатле ништа не можемо да закључимо методом сопствених вредности.

6. Испитати стабилност положаја равнотеже $X^* = (0,0)$ динамичког система

$$\begin{aligned} x_1' &= -\sin x_2 \\ x_2' &= x_1. \end{aligned}$$

Скица решења.

Означимо $F(x_1,x_2) = (-\sin x_2, x_1)$. Нека је $V(x_1,x_2) = x_1^2+2-2\cos x_2$. Доказаћемо да је ово функција Љапунова за дати систем. Најпре, важи $V(X^*) = 0$. Можемо посматрати довољно малу околину X^*, на пример $U = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2 < (2\pi)^2\}$, и важи $V(X) > 0$ за $X \in U \setminus \{X^*\}$. Како је $\nabla V(x_1,x_2) = (2x_1, 2\sin x_2)$, имамо

$$\langle \nabla V(x_1,x_2), F(x_1,x_2)\rangle = 2x_1\cdot(-\sin x_2) + 2\sin x_2 \cdot x_1 = 0.$$

Одавде следи да је еквилибријум X^* стабилан, али не и асимптотски стабилан.
За вежбу се уверите да метод сопствених вредности не даје одговор у овом задатку.