ЗАДАЦИ ИЗ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА Б – М смер

Осми двочас

асистент: Душан Дробњак

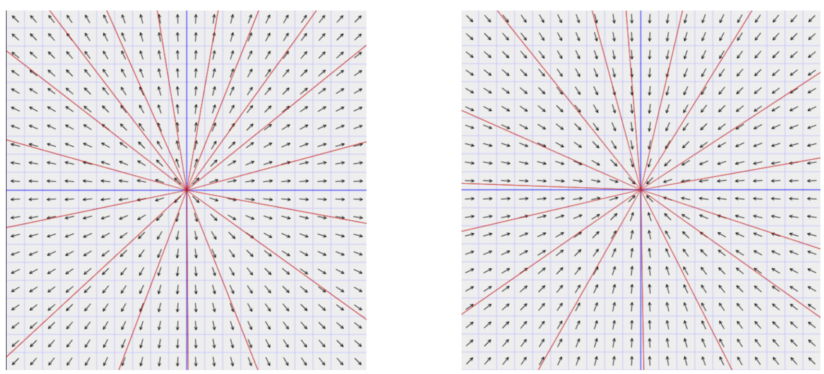
1. Скицирати фазни портрет динамичког система $X' = AX$, ако је:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ б) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ в) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ г) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ д) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Скица решења.

а) Једина стационарна тачка је $X^* = (0, 0)$. Матрица A има двоструку сопствену вредност $\lambda = 2$. Фазне криве су полуправе са крајем у координатном почетку. Оне извиру из координатног почетка, јер је $\lambda > 0$. Еквилибријум се зове нестабилна звезда (или нестабилни сингуларни чвор). Фазни потрет је на слици лево.

б) Једина стационарна тачка је $X^* = (0, 0)$. Матрица A има двоструку сопствену вредност $\lambda = -1$. Фазне криве су полуправе са крајем у координатном почетку. Оне увиру у координатни почетак, јер је $\lambda < 0$. Еквилибријум се зове стабилна звезда (или стабилни сингуларни чвор). Фазни потрет је скициран на слици десно.



в) Једина стационарна тачка је $X^* = (0, 0)$. Матрица A има двоструку сопствену вредност $\lambda = 1$. Сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda = 1$ је $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, а како је димензија сопственог потпростора 1, следи да се матрица A може свести на матрицу

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Потребно је да нађемо други базни вектор и можемо га наћи решавањем система $(A - E)\gamma_2 = \gamma_1$ (погледати тврђење 44 у скрипти). Добија се да је $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Стога је матрица трансформације

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Еквилибријум се назива нестабилан дегенерисан чвор и приказан је на слици испод лево.

г) Једина стационарна тачка је $X^* = (0, 0)$. Матрица A има двоструку сопствену вредност $\lambda = -2$. Сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda = 1$ је $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, а како је димензија сопственог потпростора 1, следи да се матрица A може свести на матрицу

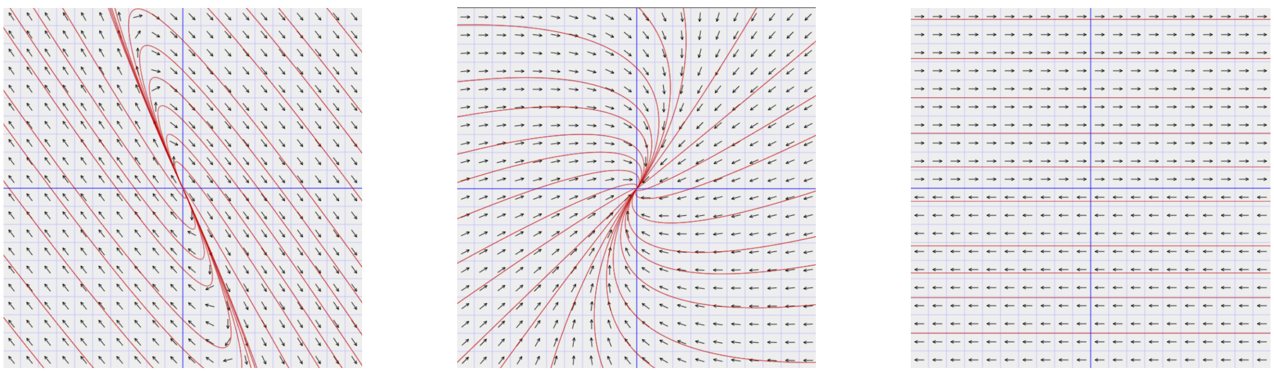
$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Потребно је да нађемо други базни вектор и можемо га наћи решавањем система $(A+2E)\gamma_2 = \gamma_1$ (погледати тврђење 44 у скрипти). Добија се да је $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Стога је матрица трансформације

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Еквилибријум се назива стабилан дегенерисан чвор и приказан је на слици испод лево.

д) Еквилибријуми су тачке скупа $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, односно све тачке x осе. Двострука сопствена вредност је $\lambda = 0$. Фазне трајекторије су праве $x_2 = c$, за $c \neq 0$. У питању су неизоловани чворови и скица је приказана испод у средини.



Напомена: Погледати и овде, за опис и анимације.
Испод су питања и задаци на која можете да одговорите да бисте били сигурни да сте схватили градиво. Такође, неке од ових чињеница могу помоћи при скицирању фазних портрета.

Питања и задаци:

1. У првом задатку под а) са прошлог двочаса важи да су четири трајекторије полуправе (док су остале трајекторије криве, које нису делови праве) које леже на две праве. Одредити те праве и препознајте их на скици фазног портрета. Повежите их са сопственим векторима. Урадите ово и у општем случају.

2. У првом задатку под б) са прошлог двочаса важи да само две трајекторије завршавају у еквилибријуму. То ће бити две полуправе на истој правој. Одредити ту праву и препознајте је на скици фазног портрета. Повежите је са сопственим вектором негативне сопствене вредности. Урадите ово и у општем случају.

3. Како бисте одредили смер трајекторија у првом задатку под в) и г) са претходног двочаса?

4. Како бисте одредили у коју страну се *увијају* спирале у првом задатку са претходног двочаса под д)?

5. Шта се дешава ако је двострука сопствена вредност $\lambda = 0$ уместо $\lambda = 2$ у првом задатку са овог двочаса под а)?

6. У првом задатку са овог двочаса под в) и г) важи да су две трајекторије полуправе (док су остале криве које нису делови праве) које леже на истој правој. Одредити ту праву и препознајте је на скици фазног портрета. Повежите је са вектором γ_1. Урадите ово у општем случају.

7. Како бисте одредили смер трајекторија у првом задатку са овог двочаса под в) и г)?

8. Шта се дешава на правој $x_2 = 0$ у првом задатку са овог двочаса под д)?

9. Урадите задатак 45 на страни 24 у скрипти.