Ојлерова метода за ЛСКК

$$Y' = AY, \quad A \in M_n(\mathbb{R})$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - сопствене вредности од A

1° $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ реални и различити

$\lambda_k \rightsquigarrow \gamma_k$ ↳ сопс. век. } решење: $\varphi_k(x) = \gamma_k \cdot e^{\lambda_k x}$

$$\text{ОР}: \; Y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x), \quad c_k \in \mathbb{R}$$

2° $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_2, \overline{\lambda_2}, \dots, \lambda_{n/2}, \overline{\lambda_{n/2}}$ комплексни ($\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) и различити

$\lambda_k = a_k + i b_k \longrightarrow \gamma_k = u_k + i v_k$

$(\overline{\lambda_k} = a_k - i b_k)$ ↳ сопс. вектор

$$\varphi_k(x) = \gamma_k \cdot e^{\lambda_k \cdot x} = (u_k + i v_k) \cdot e^{(a_k + i b_k)x} = (u_k + i v_k) e^{a_k x} \left(\cos(b_k x) + i \sin(b_k x)\right)$$

$$\psi_k^1(x) = \mathrm{Re}(\varphi_k(x)) = e^{a_k x} \cdot \left(u_k \cos(b_k x) - v_k \sin(b_k x)\right)$$

$$\psi_k^2(x) = \mathrm{Im}(\varphi_k(x)) = e^{a_k x} \cdot \left(u_k \sin(b_k x) + v_k \cos(b_k x)\right)$$

$$\text{ОР}: \; Y(x) = \sum_{k=1}^{n/2} \left(c_k^1 \psi_k^1(x) + c_k^2 \psi_k^2(x)\right), \quad c_k^1, c_k^2 \in \mathbb{R}$$

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = 2, \; \lambda_{2/3} = 3 \pm i$

$\lambda_1 = 2: \quad (A - \lambda_1 E)\gamma_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \gamma_1 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x}$

$\lambda_2 = 3 - i: \quad (A - \lambda_2 E)\gamma_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1+i & 1 & 0 \\ 1 & i & -1 \\ -1 & 2 & i \end{bmatrix} \cdot \gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \\ 2+i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{u_2} + i \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2}$$

$$\varphi_2(x) = \gamma_2 \cdot e^{(3-i)x} = e^{3x}(u_2 \cos x + v_2 \sin x) + i e^{3x}(-u_2 \sin x + v_2 \cos x)$$

ОР:

$$Y(x) = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x} \cdot \begin{bmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \\ 2\cos x + \sin x \end{bmatrix} + c_3 \cdot e^{3x} \cdot \begin{bmatrix} -\sin x \\ -\cos x - \sin x \\ \cos x - 2\sin x \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

3° $\lambda\in\mathbb{R}$ вишеструка сопствена вредност од A вишеструкости k.

$$\left.\begin{array}{l} A\in M_n(\mathbb{R}) \\ r=\operatorname{rang}(A-\lambda E) \end{array}\right\} m=n-r \quad (m \text{ је број линеарно независних решења система } (A-\lambda E)\gamma=0.)$$

$$\left.\begin{array}{l} k=\text{алгебарска вишеструкост} \\ m=\text{геометријска вишеструкост} \end{array}\right\} \text{ и важи } m\leq k.$$

а) $m=k \longrightarrow$ имамо k решења $\varphi_j(x)=\gamma_j\cdot e^{\lambda x}$, $1\leq j\leq k$, $(A-\lambda E)\gamma_j=0$, φ_j независна

б) $m<k \longrightarrow$ решење тражимо у облику

$$\varphi(x)=P_{k-m}[x]\cdot e^{\lambda x}$$

4° $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ вишеструка. Све исто као 3°, али нису $\varphi(x)$ решења, већ $Re(\varphi(x))$ и $Im(\varphi(x))$.

—напорно—

(2) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \leadsto \lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=1$

$\lambda_1=0:\ \dots\ \gamma_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2=\lambda_3=1:\quad k=2$

$r=\operatorname{rang}(A-E)=\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)=1 \Rightarrow m=n-r=3-1=2=k$

$\Rightarrow$ систем $(A-E)\cdot\gamma=0$ даје 2 лин. нез. решења, нпр. $\gamma_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\gamma_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ОР: $\varphi(x)=c_1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}e^{0x}+c_2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot e^{1x}+c_3\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot e^{1x}=\begin{bmatrix} c_1+(c_2+c_3)e^x \\ 3c_1+c_2e^x \\ -c_1+c_3e^x \end{bmatrix}$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$

$\left[W(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)(x)=\det\begin{bmatrix} 1 & e^x & e^x \\ 3 & e^x & 0 \\ -1 & 0 & e^x \end{bmatrix}=-e^{2x}\neq 0 \Rightarrow \varphi_1,\varphi_2,\varphi_3 \text{ независна} \to \text{све је ok}\right]$

(3) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \leadsto \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$

$k=3$, $r=\operatorname{rang}(A-E)=\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)=1 \Rightarrow m=n-r=3-1=2$

$\varphi(x)=P_{k-m}[x]\cdot e^{\lambda_1 x}=P_1[x]\cdot e^x=\begin{bmatrix} a_1x+a_2 \\ b_1x+b_2 \\ c_1x+c_2 \end{bmatrix}\cdot e^x \Rightarrow \varphi'(x)=\begin{bmatrix} a_1x+a_1+a_2 \\ b_1x+b_1+b_2 \\ c_1x+c_1+c_2 \end{bmatrix}\cdot e^x$

$\varphi'(x)=A\varphi(x) \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1x+a_1+a_2 \\ b_1x+b_1+b_2 \\ c_1x+c_1+c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1x+a_2 \\ b_1x+b_2 \\ c_1x+c_2 \end{bmatrix}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Добије се: $$\left.\begin{aligned} b_1 &= 2a_1 \\ c_1 &= -a_1 \\ a_1 &= a_2 - b_2 - c_2 \end{aligned}\right\}$$

Треба да одредимо 3 независна решења.

За параметре узимамо нпр. $a_1, b_2, c_2 \Rightarrow$ $\begin{aligned} b_1 &= 2a_1 \\ c_1 &= -a_1 \\ a_2 &= a_1 + b_2 + c_2 \end{aligned}$

$$\varphi(x) = P_1[x] \cdot e^x = \begin{bmatrix} a_1 x + (a_1 + b_2 + c_2) \\ 2a_1 x + b_2 \\ -a_1 x + c_2 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 1,\ b_2 = c_2 = 0$

$$\varphi_1(x) = \begin{bmatrix} x+1 \\ 2x \\ -x \end{bmatrix} \cdot e^x$$

$b_2 = 1,\ c_2 = a_1 = 0$

$$\varphi_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^x$$

$c_2 = 1,\ a_1 = b_2 = 0$

$$\varphi_3(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^x$$

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)(x) = \det\left(\begin{bmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 2x & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot e^x \right) = e^{3x} \neq 0 \Rightarrow \text{OP: } Y(x) = \sum_{k=1}^{3} c_k \varphi_k(x) \quad , c_k \in \mathbb{R}$$

Неки нехомогени случајеви

$$Y' = AY + g(x) \quad , \quad g(x) = P_s[x] \cdot e^{\mu x} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

$$Y_p(x) = Q_{m+s}[x] \cdot e^{\mu x}$$, m = вишеструкост броја μ као сопс. вр. од A

(1) $$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 + xe^x \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 - 2e^x \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_{1,2} = 2 \pm i} Y_H(x) = e^{2x} \cdot \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \cdot C \quad , C \in \mathbb{R}^2$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} x \cdot e^x \\ -2 \cdot e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -2 \end{bmatrix} \cdot e^x \Rightarrow s = 1, \mu = 1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow Y_p(x) = \begin{bmatrix} a_1 x + a_2 \\ b_1 x + b_2 \end{bmatrix} \cdot e^x$$

$$Y_p'(x) = AY_p(x) + g(x) \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 x + a_1 + a_2 \\ b_1 x + b_1 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 x + a_2 \\ b_1 x + b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ -2 \end{bmatrix}$$

систем 4×4: $a_1 = b_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = -1$, $b_2 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow Y_p(x) = \begin{bmatrix} -\frac{x}{2} - 1 \\ -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot e^x$

OP: $Y(x) = Y_H(x) + Y_p(x)$

② $y_1' = 2y_1 + y_2 + 2e^x$

$y_2' = y_1 + 2y_2 - 3e^{4x}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3} y_H(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \\ -e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \cdot C,\ C \in \mathbb{R}^2$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 2e^x \\ -3e^{4x} \end{bmatrix} \neq P_s[x] \cdot e^{\mu x}, \qquad g(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2e^x \\ 0 \end{bmatrix}}_{g_1(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -3e^{4x} \end{bmatrix}}_{g_2(x)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^x + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot e^{4x}$$

$\underline{g_1(x):}$ $\mu = 1,\ s = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow y_{P_1}(x) = \begin{bmatrix} a_1 x + a_2 \\ b_1 x + b_2 \end{bmatrix} \cdot e^x$

$$y_{P_1}'(x) = A y_{P_1}(x) + g_1(x)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 x + a_1 + a_2 \\ b_1 x + b_1 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 x + a_2 \\ b_1 x + b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \ldots\ a_1 = 1,\ b_1 = -1,\ a_2 + b_2 = -1$$

$$y_{P_1}(x) = \begin{bmatrix} x + a_2 \\ -x - 1 - a_2 \end{bmatrix} \cdot e^x = \begin{bmatrix} x \\ -x - 1 \end{bmatrix} \cdot e^x + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^x, \text{ npr. } a_2 = 0 : y_{P_1}(x) = \begin{bmatrix} x \\ -x - 1 \end{bmatrix} \cdot e^x$$

$\underline{g_2(x):}$ $\mu = 4,\ s = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow y_{P_2}(x) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot e^{4x}$

$$y_{P_2}'(x) = A y_{P_2}(x) + g_2(x)$$

$$\begin{bmatrix} 4a \\ 4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow a = -1,\ b = -2 \Rightarrow y_{P_2}(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot e^{4x}$$

OP: $y(x) = y_H(x) + y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x)$