ЗАДАЦИ ИЗ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА Б – М смер

Дванаести двочас

асистенти: Душан Дробњак

1. Нека су $m, n, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(mz - ny)\frac{\partial u}{\partial x} + (nx - kz)\frac{\partial u}{\partial y} + (ky - mx)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Скица решења.

Овој хомогеној линеарној парцијалној диференцијалној једначини одговара систем у симетричном облику

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - kz} = \frac{dz}{ky - mx}.$$

Потражимо линеарну комбинацију у облику

$$\frac{adx + bdy}{a(mz - ny) + b(nx - kz)} = \frac{dz}{ky - mx}.$$

Видимо да избор $a = \frac{k}{n}$ и $b = \frac{m}{n}$ изједначава имениоце и одатле добијамо $kdx + mdy = -ndz$. Први интеграл је онда $\psi_1(x, y, z) = kx + my + nz$. За други интеграл потражимо линеарну комбинацију у облику

$$\frac{axdx + bydy}{ax(mz - ny) + by(nx - kz)} = \frac{zdz}{z(ky - mx)}.$$

Видимо да избор $a = b = -1$ изједначава имениоце и одатле добијамо $-xdx - ydy = zdz$. Други интеграл је онда $\psi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Изаберимо, рецимо, x за независну промењљиву и тада је $mz - ny \neq 0$. Ови интеграли су независни, јер је

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 2(mz - ny) \neq 0.$$

Опште решење је онда дато са $u = \varphi(kx + my + nz, x^2 + y^2 + z^2)$, за произвољну $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

2. Решити Кошијев проблем

$$x(z^2 - y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + y(x^2 + z^2)\frac{\partial u}{\partial y} - z(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial z}, \quad u|_{x=1} = u(1, y, z) = (y + z)^2.$$

Скица решења.

Овој хомогеној линеарној парцијалној диференцијалној једначини одговара систем у симетричном облику

$$\frac{dx}{x(z^2 - y^2)} = \frac{dy}{y(x^2 + z^2)} = \frac{dz}{-z(x^2 + y^2)}.$$

Ово је систем који смо имали у задатку на прошлом двочасу, а независни интеграли које смо тада нашли су $\psi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ и $\psi_2(x, y, z) = \frac{yz}{x}$. У равни $x = 1$ ови интеграли имају вредности $\psi_1(1, y, z) = yz$ и $\psi_2(1, y, z) = 1 + y^2 + z^2$. Налазимо везу између њих и функције $u(1, y, z)$:

$$u(1, y, z) = (y + z)^2 = y^2 + z^2 + 2yz = (1 + y^2 + z^2) + 2(yz) - 1 = \psi_1(1, y, z) + 2\psi_2(1, y, z) - 1.$$

Одатле следи да је Кошијево решење дато са

$$u(x, y, z) = \psi_1(x, y, z) + 2\psi_2(x, y, z) - 1 = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2yz}{x} - 1.$$

3. Решити Кошијев проблем
$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0,\quad z=1,\, xy=x+y.$$

Скица решења.

Овој квазилинеарној парцијалној диференцијалној једначини придружујемо хомогену линеарну ПДЈ
$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}-z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$$
по непознатој функцији $u(x,y,z)$. Њој одговара систем у симетричном облику
$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{-z^2}.$$

Из једнакости $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}$ налазимо први интеграл $\psi_1(x,y,z)=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, а из једнакости $\frac{dx}{x^2}=\frac{dz}{-z^2}$ налазимо други интеграл $\psi_2(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$. Та два интеграла су независна (проверити), па је опште решење дато са
$$\varphi\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)=0,\ \text{за}\ \varphi\in C^1(\mathbb{R}^2).$$

Кошијево решење ћемо наћи тако што доведемо у везу $\psi_1(x,y,1)=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, $\psi_2(x,y,1)=\frac{1}{x}+1$, при услову $xy=x+y$. Из овог услова добијамо $y=\frac{x}{x-1}$, па се интеграли своде на
$$\psi_1\left(x,\frac{x}{x-1},1\right)=\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x}=\frac{2}{x}-1\ \text{и}\ \psi_2\left(x,\frac{x}{x-1}\right)=1+\frac{1}{x}.$$

Одавде налазимо везу
$$2\psi_2\left(x,\frac{x}{x-1}\right)-2=\frac{2}{x}=\psi_1\left(x,\frac{x}{x-1},1\right)+1.$$

Следи да је Кошијево решење
$$2\psi_2(x,y,z)-\psi_1(x,y,z)-3=0,\ \text{тј.}\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=3.$$

Овде можемо чак и експлицитно изразити (што није увек случај):
$$z=\frac{2}{3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}.$$

4. Решити Кошијев проблем
$$x(x^2+3y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+y(3x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=2z(x^2+y^2),\quad xy=z,\, x^2-y^2=z^2.$$

Скица решења.

Овој квазилинеарној парцијалној диференцијалној једначини придружујемо хомогену линеарну ПДЈ
$$x(x^2+3y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+y(3x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial y}+2z(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$
по непознатој функцији $u(x,y,z)$. Њој одговара систем у симетричном облику
$$\frac{dx}{x(x^2+3y^2)}=\frac{dy}{y(3x^2+y^2)}=\frac{dz}{2z(x^2+y^2)}.$$

Потражимо линеарну комбинацију у облику

$$\frac{\frac{a}{x}dx + \frac{b}{y}dy}{a(x^2+3y^2)+b(3x^2+y^2)} = \frac{\frac{1}{z}dz}{2(x^2+y^2)}.$$

Видимо да избор $a = b = \frac{1}{2}$ изједначава имениоце и добијамо $\frac{dx}{2x} + \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{z}$. Одатле добијамо први интеграл $\psi_1(x,y,z) = \frac{xy}{z^2}$. За други интеграл посматрајмо линеарну комбинацију

$$\frac{axdx - bydy}{ax^2(x^2+3y^2)-by^2(3x^2+y^2)} = \frac{\frac{dz}{z}}{2(x^2+y^2)}.$$

Узмимо $a = b = 2$ и онда сводимо

$$\frac{\frac{dz}{z}}{2(x^2+y^2)} = \frac{2xdx - 2ydy}{2x^4-2y^4} = \frac{2xdx-2ydy}{2(x^2-y^2)(x^2+y^2)}.$$

Одатле следи да је

$$\frac{dz}{z} = \frac{2xdx-2ydy}{x^2-y^2} = d\left(\ln|x^2-y^2|\right).$$

Други интеграл је тада $\psi_2(x,y,z) = \frac{x^2-y^2}{z}$. Интеграли су независни (проверити). За Кошијево решење је потребно да повежемо вредности првих интеграла на кривој C која се добија у пресеку површи $xy = z$ и $x^2 - y^2 = z^2$. Изразићемо оба интеграла по z:

$$\psi_1\big|_C = \frac{xy}{z^2} = \frac{z}{z^2} = \frac{1}{z},\ \psi_2\big|_C = \frac{x^2-y^2}{z} = \frac{z^2}{z} = z.$$

Следи да је $\psi_1|_C \cdot \psi_2|_C - 1 = 0$. Кошијево решење је дато са

$$\psi_1(x,y,z)\psi_2(x,y,z) = 1,\ \text{тј.}\ \frac{xy(x^2-y^2)}{z^3} = 1.$$