ЗАДАЦИ ИЗ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА Б – М смер

Једанаести двочас

асистент: Душан Дробњак

1. Решити системе у симетричном облику:

а) $\frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$;

б) $\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}$;

в) $\frac{dx}{4y-3z} = \frac{dy}{4x-2z} = \frac{dz}{2y-3x}$;

г) $\frac{dx}{x-y^2-z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$.

Скица решења.

а) Узмимо z за независну промењљиву и $z \neq 0$. Једнакост $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ можемо да интегралимо и добијамо $\ln|y| = \ln|z| + c_1$, за $c_1 \in \mathbb{R}$. Стандардним поступком добијамо $y = cz$, за $c \in \mathbb{R}$. Први интеграл је $\psi_1(x, y, z) = \frac{y}{z}$. Из једнакости $\frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dz}{z}$ добијамо диференцијалну једначину (по z):

$$x' = \frac{x}{z} + \frac{y^2 + z^2}{z} = \frac{1}{z} \cdot x - (c^2 + 1)z.$$

То је линеарна једначина и њено решење је $x(z) = c_2 z + (1 + c^2)y^2 = c_2 z + y^2 + z^2$, па је други интеграл $\psi_2(x, y, z) = \frac{x-y^2-z^2}{z}$. Интеграли су независни, јер је

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z} & -\frac{2y}{z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{z^2} \neq 0,$$

па је опште решење $\psi_1 = c_1$, $\psi_2 = c_2$, за $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

б) Из једнакости $\frac{dx}{y-u} = \frac{dz}{u-y} = \frac{-dz}{y-u}$ добијамо $dx = -dz$, а одатле налазимо први интеграл $\psi_1(x, y, z, u) = x + z$. Из једнакости $\frac{dy}{z-x} = \frac{du}{x-z} = \frac{-du}{z-x}$ добијамо $dy = -du$, односно добијамо други интеграл $\psi_2(x, y, z, u) = y + u$. Потребан нам је још један интеграл једначине. Из задатка директно имамо да је $\frac{dx-dz}{2(y-u)} = \frac{dy-du}{2(z-x)}$, тј. $\frac{d(x-z)}{y-u} = \frac{d(y-u)}{z-x}$ и коначно $(z-x)d(z-x) = -(y-u)d(y-u)$. Интеграљењем добијамо $\psi_3(x, y, z, u) = (z-x)^2 + (y-u)^2$.

Изаберимо x за независну промењљиву и тада имамо да је $y \neq u$. Ова три интеграла су независна, јер је

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(y, z, u)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial z} & \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial z} & \frac{\partial \psi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial y} & \frac{\partial \psi_3}{\partial z} & \frac{\partial \psi_3}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2(y-u) & 2(z-x) & 2(u-y) \end{vmatrix} = 4(y-u) \neq 0,$$

па је опште решење $\psi_i = c_i$, $c_i \in \mathbb{R}$, за $i \in \{1, 2, 3\}$.

в) Потражимо линеарну комбинацију $4y - 3z$ и $4x - 2z$ која би нам одговарала. Имамо да важи $\frac{adx+bdy}{a(4y-3z)+b(4x-2z)} = \frac{dz}{2y-3x}$. Желимо да именилац $a(4y - 3z) + b(4x - 2z) = x(4b) + y(4a) + z(-3a - 2b)$ буде самерљив са $2y - 3x$. Зато ћемо да бирамо коефицијенте a и b тако да важи $-3a - 2b = 0$ и $\frac{4b}{4a} = \frac{-3}{2}$. Узимамо $a = 2$ и $b = -3$. Тада је $\frac{2dx-3dy}{-12x+8y} = \frac{dz}{2y-3x}$, одакле следи $2dx - 3dy = 4dz$. Први интеграл је $\psi_1(x, y, z) = 2x - 3y - 4z$.

На сличан начин потражимо и други интеграл, само ћемо имениоце правити да буду другог степена. Тражимо a и b тако да се именилац $\frac{axdx+bydy}{ax(4y-3z)+by(4x-2z)}$ слаже са имениоцем $\frac{zdz}{z(2y-3x)}$. Видимо да је избор

$a = 1$ и $b = -1$ одговарајући и имамо $xdx - ydy = zdz$, одакле је други интеграл $\psi_2(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$. Ако изаберемо x за независну променљиву, имамо $4y - 3z \neq 0$, а онда независност интеграла следи из

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y} & \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2y & -2z \end{vmatrix} = 2(3z - 4y) \neq 0.$$

Опште решење система је $\psi_1 = c_1$, $\psi_2 = c_2$, за $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

г) Из једнакости $\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$ закључујемо $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$, а одатле налазимо први интеграл $\psi_1(x, y, z) = \frac{z}{y} = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Из једнакости $\frac{dz}{2xz} = \frac{dx}{x^2-y^2-z^2} = \frac{dx}{x^2-z^2(1+c_1^2)}$ добијамо диференцијалну једначину (по z):

$$x' - \frac{1}{2z} \cdot x = \frac{z(1 + c_1^2)}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Ово је Бернулијева једначина и после смене $x^2 = u$ се своди на линеарну једначуну:

$$u' - \frac{1}{z} \cdot u = -z(1 + c_1^2).$$

Њено решење је $u = cz - z^2(1 + c_1^2)$, па је решење Бернулијеве једначине имплицитно задато са

$$x^2 = cz - z^2(1 + c_1^2) = cz - z^2 - y^2.$$

Други интеграл је онда $\psi_2(x, y, z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{z}$.
Изаберимо z за независну променљиву и тада је $2xz \neq 0$. Независност интеграла следи из

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{z} \\ \frac{2x}{z} & \frac{2y}{z} \end{vmatrix} = -\frac{2x}{z^2} \neq 0.$$

Опште решење система је $\psi_1 = c_1$, $\psi_2 = c_2$, за $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Решити систем диференцијалних једначина сводећи га на систем у симетричном облику:

$$y' = \frac{y(x^2 + z^2)}{x(z^2 - y^2)}, \quad z' = \frac{z(x^2 + y^2)}{x(y^2 - z^2)}.$$

Скица решења.

Систем из задатка је еквивалентан систему у симетричном облику

$$\frac{dx}{x(z^2 - y^2)} = \frac{dy}{y(x^2 + z^2)} = \frac{dz}{-z(x^2 + y^2)}.$$

За произвољне a и b имамо да важи $\frac{axdx+bydy}{ax^2(z^2-y^2)+by^2(x^2+z^2)} = \frac{zdz}{-z^2(x^2+y^2)}$. За $a = b = -1$ важи да сеímениоци поклапају, па закључујемо да је $-xdx - ydy = zdz$, а одатле је први интеграл $\psi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Такође, можемо направити и линеарну комбинацију $\frac{\frac{a}{x}dx+\frac{b}{y}dy}{a(z^2-y^2)+b(x^2+z^2)} = \frac{\frac{1}{z}dz}{-(x^2+y^2)}$. За избор $a = 1$ и $b = -1$ важи да су имениоци једнаки, па је $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. Интеграцијом добијамо $\ln|x| - \ln|y| - \ln|z| = c$, $c \in \mathbb{R}$, а одатле и други интеграл $\psi_2(x, y, z) = \frac{yz}{x}$. Ако изаберемо x за независну променљиву, имамо $x(y^2 - z^2) \neq 0$, а онда независност интеграла следи из

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y} & \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ \frac{z}{x} & \frac{y}{x} \end{vmatrix} = \frac{2(y^2 - z^2)}{x} \neq 0.$$

Опште решење система је $\psi_1 = c_1$, $\psi_2 = c_2$, за $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.