ЗАДАЦИ ИЗ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА Б – М смер

Десети двочас

асистент: Душан Дробњак

1. Одредити број решења граничног проблема:

а) $y'' + y = 0,\ y(0) = y(\pi/2) = 1$;

б) $y'' + y = 0,\ y(0) = y(\pi) = 1$;

в) $y'' + y = 0,\ y(0) = y(2\pi) = 1$.

Скица решења.

Опште решење једначине у сва три случаја је

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \text{ за } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

а) Услови недвосмислено задају $c_1 = c_2 = 1$, тако да имамо јединствено решење граничног проблема.

б) Први услов даје $c_1 = 1$, а други $c_1 = -1$, што није могуће. Дакле, у овом случају немамо решење граничног проблема.

в) Оба услова дају исто, $c_1 = 1$. Друга константа може бити произвољна, тако да у овом случају има бесконачно много решења.

2. Решити гранични проблем $y'' = x^2,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$.

Скица решења. Можемо да интегралимо једначину два пута и добијамо опште решење једначине

$$y(x) = \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2.$$

Услови $y(0) = 0$ и $y(1) = 0$ нам дају редом $c_2 = 0$ и $\frac{1}{12} + c_1 + c_2 = 0$. Одатле је јасно да гранични проблем има јединствено решење $y(x) = \frac{x^4 - x}{12}$.

Урадимо сада задатак и налазећи Гринову функцију. Функцију y_1 тражимо као решење једначине $y'' = 0$ са почетним условом $y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = -1$. Јединствено решење овог Кошијевог проблема је $y_1(x) = -x$. Функцију y_2 тражимо као решење једначине $y'' = 0$ са почетним условом $y_2(1) = 0,\ y_2'(1) = -1$. Јединствено решење овог Кошијевог проблема је $y_2(x) = -x + 1$. Вронскијан је једнак

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & -t+1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = t + (-t+1) = 1.$$

Гринова функција је

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{(-t)(-x+1)}{1}, & 0 \le t \le x \le 1, \\ \frac{(-x)(-t+1)}{1}, & 0 \le x \le t \le 1. \end{cases} = \begin{cases} xt - t, & 0 \le t \le x \le 1, \\ xt - x, & 0 \le x \le t \le 1. \end{cases}$$

Решење задатка је онда

$$y(x) = \int\limits_0^1 G(x,t) f(t) dt = \int\limits_0^x t(x-1)t^2 dt + \int\limits_x^1 x(t-1)t^2 dt = \frac{x^4 - x}{12}.$$

3. Одредити Гринову функцију за гранични проблем $y'' + y = f(x),\ y(0) = 0,\ y'(1) = 0$.

Скица решења.

Хомогена једначина $y'' + y = 0$ има опште решење $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Функцију y_1 тражимо као решење једначине $y'' + y = 0$ са почетним условом $y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = -1$. Јединствено решење овог Кошијевог проблема је $y_1(x) = -\sin x$. Функцију y_2 тражимо као решење једначине $y'' + y = 0$ са почетним условом $y_2(1) = -1,\ y_2'(1) = 0$. Јединствено решење овог Кошијевог проблема је $y_2(x) = \cos(x-1)$. Вронскијан је једнак

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos(t-1) \\ -\cos t & -\sin(t-1) \end{vmatrix} = \sin t \sin(t-1) + \cos t \cos(t-1) = \cos 1.$$

Гринова функција је

$$G(x,t) = \begin{cases} -\frac{\sin t \cos(x-1)}{\cos 1}, & 0 \le t \le x \le 1, \\ -\frac{\sin x \cos(t-1)}{\cos 1}, & 0 \le x \le t \le 1. \end{cases}$$

4. Решити гранични проблем $y'' = x^2,\ y(0) = 0,\ y(1) + y'(1) = 2$.

Скица решења.

Функција $y_0(x) = x$ задовољава граничне услове $y_0(0) = 0$ и $y_0(1) + y_0'(1) = 2$, тако да уводимо смену $z(x) = y(x) - x$. Гранични услови се своде на хомогене $z(0) = 0$ и $z(1) + z'(1) = 0$. Једначина се своди на $z'' = x^2$. Даље решавамо гранични проблем са хомогеним граничним условима.
Функцију z_1 тражимо као решење једначине $z'' = 0$ са почетним условом $z_1(0) = 0,\ z_1'(0) = -1$. Јединствено решење овог Кошијевог проблема је $z_1(x) = -x$. Функцију z_2 тражимо као решење једначине $z'' = 0$ са почетним условом $z_2(1) = 1,\ z_2'(1) = -1$. Јединствено решење овог Кошијевог проблема је $z_2(x) = -x + 2$. Вронскијан је једнак

$$W(z_1, z_2)(t) = \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & -t+2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = t + (-t+2) = 2.$$

Гринова функција је

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{t(x-2)}{2}, & 0 \le t \le x \le 1, \\ \frac{x(t-2)}{2}, & 0 \le x \le t \le 1. \end{cases}$$

Решење задатка је онда

$$y(x) = z(x) + x = \int_0^1 G(x,t) f(t) dt + x = \int_0^x \frac{t(x-2)}{2} dt + \int_x^1 \frac{x(t-2)}{2} dt + x = \frac{x^4}{12} - \frac{5x}{24} + x = \frac{2x^4 + 19x}{24}.$$