Степени редови – наставак

T $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ и R полупречник конвергенције. Тада:

1) (непрекидност; Т22; може и за $\mathbb{C}$ ред)
f је непрекидна на скупу $\{x \mid |x-x_0|<R\}$.

2) (диференцијабилност) $f:(x_0-R, x_0+R)\to \mathbb{C}$ је ∞ пута диференцијабилна и важи

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\, a_n (x-x_0)^{n-k}$$

T (Абел) $\sum a_n$ конв и $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на $-1<x<1$.
Тада $\lim_{x\to 1-} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

1. Израчунати $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Кренимо од $\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$.

$$\text{T 2)} \Rightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad /\cdot x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x\cdot\left(-\frac{1}{(1-x)^2}\right)\cdot(-1)=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Убацимо $x=\frac{1}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1/2}{(1-1/2)^2}=2.$

2. Полазећи од $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$, доказати $\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Означимо $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$

$$\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2n+1)x^{2n}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f(x)=\operatorname{arctg} x + c$$

$$x=0:\quad f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{0^{2n+1}}{2n+1}=0\Rightarrow c=0\Rightarrow f(x)=\operatorname{arctg} x$$

③ Израчунати $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x \quad \text{на } |x|<1. \quad x = ? \quad \text{Абел!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ конв. по Лајбницу} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1-} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

④ Развити у степене редове:

а) $\log(1+x+x^2+x^3)$

б) $\sin^3 x$

в) $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

г) $\log(x+\sqrt{1+x^2})$

д) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

ђ) $e^x \cos x$

а) $$\log(1+x+x^2+x^3) = \log((1+x)(1+x^2)) = \log(1+x) + \log(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n + x^{2n}}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n\cancel{-1+1}} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{2n+1} \frac{x^{2n}}{2n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 2 \nmid n \\ \frac{2(-1)^{\frac{n}{2}+1} - 1}{n}, & 2 \mid n \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} x \in (-1,1] \\ x^2 \in (-1,1] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{x \in (-1,1]}$$

(полупречник је $R=1$)
$x=-1$ није деф

б) $$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot 3 - \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] = \frac{3}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}(1-9^n)$$

$\sin 3x = \sin(2x+x) = \dots$

$\underline{x \in \mathbb{R}}$

в) $$\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} = (1-x^2)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

$$(-1)^n \cdot \binom{-3/2}{n} = (-1)^n \cdot \frac{\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{2n+1}{2}\right)}{n!} = (-1)^n \frac{(-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} \cdot (2n+1)!!}{n!} = \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$$

крајње тачке $x = \pm 1$: функција није дефинисана

г) $\log(x+\sqrt{1+x^2}) = f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} \cdot \cancel{2}x\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\sqrt{1+x^2} + x\right) = (1+x^2)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad \text{за } |x|<1$$

$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1 \Rightarrow g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}=f'(x)$

$\Rightarrow f(x)=g(x)+C$ за $|x|<1$. $x=0 \Rightarrow f(0)=0=g(0)+C=0+C \Rightarrow C=0$

$\Rightarrow f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, за $|x|<1$

Границе: $x=\pm 1$: ред $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(\pm 1)^{2n+1}}{2n+1}$ апс. конв. (доказати!)

по Абеловој Т важи и за $x=\pm 1 \Rightarrow D=[-1,1]$.

д) $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$

$\binom{-1/2}{0}=1$, па $(-1)!!=1$

$f'(x)=\arcsin x+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=\arcsin x$

$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$, $|x|<1$

$\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+C$. $x=0$: $f'(0)=0 \Rightarrow C=0$

$\Rightarrow \arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$ / није задатак, али: $x=\pm 1$: апс. конв $\overset{\text{Абел}}{\Rightarrow} D=[-1,1]$

$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}+C$, $|x|<1$

$x=0$: $f(0)=1 \Rightarrow C=1$

Границе: $x=\pm 1$, $x^{2n+2}=1 \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{5}{2n+1}+\frac{6}{(2n+1)^2} \overset{\text{Рабе}}{\Rightarrow}$ конв $\overset{\text{Абел}}{\Rightarrow}$ важи на $D=[-1,1]$

ђ) $e^{ix}=\cos x+i\sin x \Rightarrow e^{ix+x}=e^x\cdot e^{ix}=e^x\cos x+ie^x\sin x$

$\Rightarrow e^x\cos x=\operatorname{Re} e^{x(1+i)}=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n(1+i)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Re}\left[\frac{x^n}{n!}\cdot\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}\operatorname{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{4}n}\right)$

$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{\pi n}{4}$, $D=\mathbb{R}$, јер за $z\in\mathbb{C}$ важи $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

Можемо и $e^x\sin x=\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n(1+i)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cdot\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{4}n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin\frac{\pi n}{4}}{n!}\cdot x^n$, $x\in\mathbb{R}$

Нпр, за $x=\pi$: $0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}}{n!}\cdot\pi^n$ или $x=\frac{\pi}{2}$: $e^{\frac{\pi}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{4}\,\pi^n}{2^{\frac{n}{2}}\cdot n!}$ итд.