Степени редови

(*) Ред $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ назива се степени ред са центром x_0.

a_n – коефицијенти ($a_n \in \mathbb{R}$, може и $\mathbb{C}$)

Питање: За које x конвергира ред? – $x=x_0$ сигурно.

↳ тј. шта је домен D од f?

(*) Област конвергенције је интервал са центром x_0; облика

$(x_0-R, x_0+R) \vee (x_0-R, x_0+R] \vee [x_0-R, x_0+R) \vee [x_0-R, x_0+R]$

- за $|x-x_0|<R$ ред апсолутно конвергира
- за $|x-x_0|>R$ ред дивергира
- за $|x-x_0|=R$ – за сад не знамо

(*) Из Кошијевог критеријума: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}<1 \Rightarrow |x-x_0|<\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

ако овај lim $\exists$

конвенција: $R=0$ ако $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ и $R=\infty$ ако $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$

Примери: 1) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $(x_0=0)$

$a_n=\frac{1}{n!}$, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty \Rightarrow D=\mathbb{R}$

2) $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(x_0=0)$

$a_0=0,\ a_1=\frac{1}{1!},\ a_2=0,\ a_3=\frac{-1}{3!},\ a_4=0,\ a_5=\frac{1}{5!}, \ldots$

$$a_n=\begin{cases}0, & 2\mid n\\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!}, & 2\nmid n\end{cases} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}=\begin{cases}0, & 2\mid n\\ \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}, & 2\nmid n\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\overset{?}{\underset{(\Leftarrow)}{=}}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0 \Rightarrow R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=+\infty$$

$\Rightarrow D=\mathbb{R}$

3) догшати: $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (решење: $D=\mathbb{R}$)

4) $\log(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$

$$R=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$x\in(-1,1)$ – конвергира

$|x|>1$ – дивергира

$\underline{x=-1:}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n}=\sum -\frac{1}{n}=-\infty$ див

$\underline{x=1:}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ конв (Лајбниц)

$\Rightarrow D=(-1,1]$

5) $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-\alpha}=1$$

$\underline{x=-1:}$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}$ $\qquad\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

$\alpha\in[n_0,n_0+1)\Rightarrow n\geq n_0:$ $\underset{=a_n}{\binom{\alpha}{n}}$ мења знак $+,-,+,-\ldots$

$\Rightarrow(-1)^n\binom{\alpha}{n}$ сталног знака $(*)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}<\infty\iff\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|<\infty$$

Гаус $\Rightarrow$ конв акко $\alpha\geq0$ $\left[\begin{array}{l}\alpha\in\mathbb{N}_0\ \checkmark\\ \alpha\notin\mathbb{N}_0:\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\ldots=1+\frac{\alpha+1}{n}+\frac{\alpha^2+\alpha}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\to\infty}\end{array}\right]$

$\underline{x=1:}$ $\sum\binom{\alpha}{n}$?

1° $\alpha\geq0$: апсолутно конв

2° $\alpha<0$: $\beta=-\alpha>0$

2.1° $\alpha\leq-1$: $\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\left|(-1)^n\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!}\right|=\frac{\beta}{1}\cdot\frac{\beta+1}{2}\cdots\frac{\beta+n-1}{n}\geq1\cdot\ldots\cdot1=1\not\to0$

$\beta\geq1$

2.2° $\alpha\in(-1,0)$; $\beta\in(0,1)$

$\binom{\alpha}{n}=(-1)^n\underbrace{\boxed{\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!}}}_{=b_n}$ $\qquad$ Лајбниц? $\quad\frac{b_n}{b_{n+1}}=\underset{=1+\frac{1-\beta}{\beta+n}}{\frac{n+1}{\beta+n}}>1\Rightarrow b_n\downarrow$

$$\frac{b_1}{b_{n+1}}=\left(1+\frac{1-\beta}{\beta+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1-\beta}{\beta+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1-\beta}{\beta+n}\right)>1+(1-\beta)\left(\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\beta+2}+\ldots+\frac{1}{\beta+n}\right)$$

$0<b_{n+1}<\dfrac{b_1}{1+(1-\beta)\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\beta+k}}$ $\Big/\lim\limits_{n\to\infty}$ $\Rightarrow$ $0\leq\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}\leq0$ ✓ Лајбниц

Решење:

I) $\alpha\geq0$: $D=[-1,1]$

II) $\alpha\in(-1,0)$: $D=(-1,1]$

III) $\alpha\leq-1$: $D=(-1,1)$

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{3^{2n}+2^{2n}}{2n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{n}}}=\frac{\lim\sqrt[n]{n}}{\lim\sqrt[n]{3^n+2^n}}=\frac{1}{3}$$

$|x+1|<\frac{1}{3}$ конв.

$|x+1|>\frac{1}{3}$ див.

$|x+1|=\frac{1}{3}$? $\to x=-\frac{2}{3}$, $\to x=-\frac{4}{3}$

$\underline{x=-\frac{4}{3}}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\Rightarrow$ конв

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\to$ конв.

$\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n\to$ конв

$\underline{x=-\frac{2}{3}}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\underbrace{(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{aпс. конв}}\right]\Rightarrow$ див

$\frac{1}{n}\to$ див

$$D=\left[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$, $a,b>0$

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}}}=\frac{1}{M}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{n^2}}=\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^2}+\frac{b^n}{n^2}}\leq\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}}\leq\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n}}=\frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{n}}\quad /\lim_{n\to\infty}$$

$\downarrow \frac{M}{1}=M$ $\qquad$ $M=\max\{a,b\}$ $\qquad$ $\downarrow \frac{M}{1}=M$

$x=\pm\frac{1}{M}$?

1° $a<b$, $M=b$

$\underline{x=\frac{1}{b}}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\frac{1}{b^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\frac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\to$ конв

$\to$ конв

$\underline{x=-\frac{1}{b}}$: $\left|\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\cdot\frac{(-1)^n}{b^n}\right|=\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{b^n}$

2° $a=b$, $M=a=b$

$\underline{x=\frac{1}{a}}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{a^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$ $\to$ див.

$\underline{x=-\frac{1}{a}}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\frac{(-1)^n}{a^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$

$\to$ конв.

3° $a > b$, $M = a$

$x = \frac{1}{a}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{a^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^n\right) \Rightarrow$ див.

↳ див. ↳ конв.

$x = -\frac{1}{a}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right)\cdot\frac{(-1)^n}{a^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n} + \left(\frac{b}{a}\right)^n\cdot\frac{1}{n^2}\cdot(-1)^n\right) \Rightarrow$ конв.

↳ конв. ↳ апс. конв.

1° $a < b$: $D = \left[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right]$

2° $a = b$: $D = \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$

3° $a > b$: $D = \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$

(3) Развити $\frac{1}{1-x^2}$ у степени ред.

$$\frac{1}{1-x^2} = (1+x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}(+x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

↑ важи на $(-1,1)$

$$\binom{-1}{n} = \frac{-1(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)}{n!} = (-1)^n\cdot\frac{n!}{n!} = (-1)^n$$